

최소점 표현법을 이용한 오일러 방정식의 수렴 가속화에 관한 연구

CONVERGENCE ACCELERATION OF THE EULER EQUATION THROUGH SPARSE POINT REPRESENTATION

이도형¹, 양승철¹, 이강수¹, 강형민²

- 1) 한양대학교 기계정보경영공학부, 경기도 안산시 상록구 사1동 426-791
- 2) 서울대학교 기계항공공학부, 서울 151-742

교신 저자: 이도형, dohyung@hanyang.ac.kr

요약

본 연구에서는 최소점 표현(SPR) 방법을 유동 지배방정식 계산에 적용하여 계산 효율을 증대 시켰다. 특히 공간상의 정확도를 높이기 위해 새로운 임계법을 개발 적용하였다. SPR dataset 구성 시 안정화 과정 도입을 통해 압축률을 증가시켰으며, time integration 단계에서 SPR point가 아니고 유동변수의 변화가 작을 때 weighting factor를 곱해줌으로서 수렴속도를 증가시켰다. 등 간격이 아닌 격자에서 보간 다항식의 계수를 격자간격에 따라 변하게 함으로써 근사값의 정확도를 높이고자 하였다. 2차원 오일러 방정식을 계산하는데 있어 이러한 기술들을 적용하여, 압축률을 증가시키고, 수렴을 가속화시켜 데이터 저장 공간과 계산시간을 줄일 수 있다.

INTRODUCTION

전산유체공학에서 다양한 high order scheme들이 통합 설계 과정에 널리 응용되고 있으나 전체 크기의 통합 디자인을 하기에는 아직 다소 부족하다. 전체 크기의 통합 설계에는 아주 많은 공간상의 격자가 필요하기 때문에 계산시간이 기하급수적으로 늘어날 수밖에 없다. 그러나 충격파, 경계층 등 정보의 구배가 급격하게 변하는 부분에만 조밀한 격자를 사용함으로써 계산 자원의 낭비를 줄일 수 있다. 이런 이유로 최근 웨이블릿 기반의 수치방법들이 혁신적인 기술로써 대두되고 있다.

웨이블릿 기반의 수치방법은 adaptive wavelet Galerkin method(AWGM)[1,2]과 adaptive wavelet collocation method(AWCM)[3,4]로 분류할 수 있다. AWGM에 비해 AWCM은 물리공간에서 계산을 수행하기 때문에 비선형성을 다루기에 적합하다. AWCM 연구에 있어서 Holmström은 보간 웨이블릿 변환 기반인 최소점 표현(SPR) 알고리즘을 개발하였고[3], Sjögreen는 압축성 오일러 방정식을 풀기 위해 다중해상도 방법을 사용하였다[4].

본 연구에서는 SPR을 기반으로 conventional solver의 공간상 정확성을 유지하기 위해 새로운 임계법을 개발하였다. 또한 SPR dataset 구성 시 안정화 과정을 통해 압축률을 증가시켰다. time integration 단계에 있어서 제거된 격자에 대하여 유동변수의 변화가 작을 때 weighting factor를 곱해줌으로서 수렴속도를 증가시켰다. 등 간격이 아닌 격자에서 보간 다항식의 계수를 격자간격에 따라 변하게 함으로써 근사값의 정확도를 높이고자 하였다. 일련의 기술들을 오일러 방정식의 수치예제를 통해 계산 효율의 개선을 분석한다.

SPARSE POINT REPRESENTATION(SPR) FOR EULER EQUATION

오일러 방정식을 generalized coordinate로 변환하면 식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} = - \left[\frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} \right] = - R_{i,j}^n, \text{ where } \bar{Q} = \frac{Q}{J}, \bar{E} = \frac{1}{J} [\xi_t Q + \xi_x E + \xi_y F], \bar{F} = \frac{1}{J} [\eta_t Q + \eta_x E + \eta_y F] \quad (1)$$

SPR 방법을 이용한 오일러 방정식의 계산은 각 시간 단계에서 SPR dataset을 재결정한 후, flux를 계산하고(SPR, 비 SPR 구분), residual을 결정하는 과정으로 진행된다.

먼저, 식 (1) 이산화한 후 보존변수 $Q_{i,j}^n$ 에 대하여 짝수 점은 그대로 남기고 홀수 점은 식 (2)와 같이 4차 보간 다항식을 이용하여 짝수 점으로부터 보간하는 decomposition 과정을 거친다. 홀수 점의 웨이블릿 계수는 실제 값과 근사 값의 차로 정의되며[5], threshold 과정을 통해 홀수 점을 제거함으로써 SPR dataset을 구성한다.

SPR dataset에서 남겨진 격자점에 대해서는 일반적인 공간 이산화 방법(본 연구에서는 Van leer flux splitting)을 통해 정확한 flux를 계산하게 되고, SPR dataset에 포함되지 않은 격자점에 대해서는 식 (2)와 같은 4차 보간 다항식에 의해 짝수 점으로부터 flux를 interpolation하게 된다. 계산된 flux의 공간 구배의 합으로 residual을 계산한다.

이 과정들은 residual이 거의 0(steady-state)이 될 때까지 반복적으로 수행된다.

$$\begin{aligned} \text{x-dir. : } \tilde{Q}_{i+1,j}^n &= -\frac{1}{16} Q_{i-2,j}^n + \frac{9}{16} Q_{i,j}^n + \frac{9}{16} Q_{i+2,j}^n - \frac{1}{16} Q_{i+4,j}^n \\ \text{y-dir. : } \tilde{Q}_{i,j+1}^n &= -\frac{1}{16} Q_{i,j-2}^n + \frac{9}{16} Q_{i,j}^n + \frac{9}{16} Q_{i,j+2}^n - \frac{1}{16} Q_{i,j+4}^n \\ \text{diagonal-dir. : } \tilde{Q}_{i+1,j+1}^n &= 0.5 \left(-\frac{1}{16} Q_{i-2,j-2}^n + \frac{9}{16} Q_{i,j}^n + \frac{9}{16} Q_{i+2,j+2}^n - \frac{1}{16} Q_{i+4,j+4}^n \right) + \\ &\quad 0.5 \left(-\frac{1}{16} Q_{i-2,j+4}^n + \frac{9}{16} Q_{i,j+2}^n + \frac{9}{16} Q_{i+2,j}^n - \frac{1}{16} Q_{i+4,j-2}^n \right) \end{aligned} \quad (2)$$

threshold 과정에서는 공간상의 정확성을 유지하고, 계산 효율을 증가시키기 위해 수정된 threshold 값과 SPR 데이터의 안정성을 도모하는 새로운 방법을 적용하였다. 우선, 수정된 threshold 값은 식 (3)과 같으며, 만약 웨이블릿 계수가 ϵ' 보다 작다면 홀수 점을 제거하여 SPR dataset을 구성한다.

$$\epsilon' = \min((\Delta x)^2, \epsilon) \quad (3)$$

또한 부가적인 오차로 인해 SPR 데이터의 격자가 다수 바뀌는 것을 방지하고, 압축률을 증가시킬 수 있는 stabilization technique를 통해 안정적인 SPR dataset을 구성한다.

이때, 식 (2)에서 4차 보간 다항식의 계수들은 등간격의 격자에서 구한 값들이다. 따라서 식 (4)와 같이 계수들이 격자간격에 종속적으로 바뀌게 만들어 격자가 등간격이 아닐 경우에도 근사값의 정확성을 높일 수 있다. 식 (4)의 L_1, L_2, L_3, L_4 는 격자간 거리를 나타낸다.

$$\tilde{A}_{i+1} = \frac{1}{16(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)} (-L_1 A_{i-2} + 9L_2 A_i + 9L_3 A_{i+2} - L_4 A_{i+4}) \quad (4)$$

전체 계산 영역에서 residual을 계산한 후, Runge-kutta explicit 방법을 통해 time integration을 수행하여 해를 구하게 되는데, 이 과정에서 SPR dataset에서 제외된 점의

$dQ_{i,j}$ 가 threshold 값보다 작다면 식 (5)와 같이 weighting factor를 곱하여주는 residual damping technique을 통해 해의 정확성을 유지함과 동시에 수렴속도를 증가시킨다.

$$d\tilde{Q}_{i,j} = d\tilde{Q}_{i,j} \times \min\left(\frac{|d\tilde{Q}_{i,j}|}{\alpha \Delta t \min\left(\frac{0.1}{\Delta x}, 1\right)}, 1\right) \quad (5)$$

NUMERICAL TEST

SPR방법과 새롭게 적용된 기술들의 유용성을 분석하기 위하여 NACA0012 airfoil 주위의 정상상태 유동을 2차원 오일러 방정식을 풀어 해석하였다. 201×97 개의 격자를 사용하였고, 10^{-5} 의 threshold 값을 적용한다. 받음각은 5° 이고, Mach수는 0.3이다. 압축률은 남은 격자수에 대한 전체 격자수를 의미하며, 수치가 클수록 압축효과가 큰 것이다.

stabilization technique을 사용하지 않고, SPR방법만을 썼을 경우(그림 2.(a)) 압축률이 2.03이었으며, stabilization technique을 사용하였을 경우(그림 2.(b)) 격자점이 쉽게 들어오고 나가지 못하게 함으로써 3.61로 높일 수 있었다. 이와 동시에 격자 간격을 고려하여 4차 보간 다항식을 수정한 경우(그림 2.(c)) 압축률을 4.23으로 높일 수 있었으며 이는 단지 25% 정도의 격자만으로 계산이 가능함을 의미한다. 그림 2.는 남은 격자들을 보여준다.

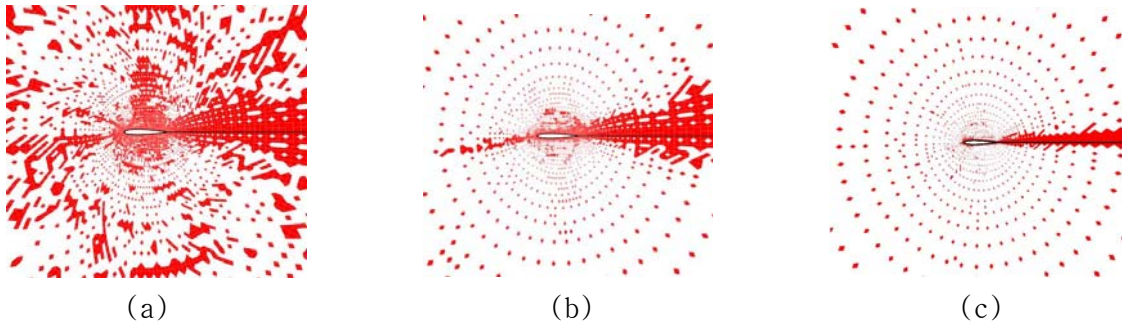


그림 2. Grid points preserved

residual damping technique의 weighting factor를 통해 residual을 급격히 감소시킴으로써 conventional solver와 비교하여 iteration이 48.6% 감소하였으며, CPU time은 60.6%가 감소하였다. 또한 이와 동시에 격자 간격을 고려하여 4차 보간 다항식을 수정한 경우 residual damping technique을 썼을 때와 비교하여, iteration을 11.2% 감소시켰다.

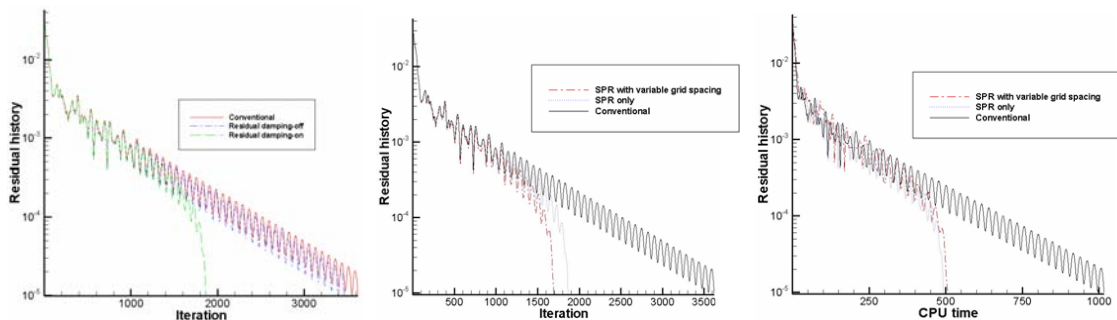


그림 3. Residual history

그러나 격자간격계산에 소모되는 시간으로 인하여 CPU time은 8.9% 증가하였다. iteration 감소가 CPU time의 증가보다 크므로 보다 많은 격자의 계산 시 더욱 유용할 것으로 사료된다.

그림 3.에 이를 나타내었으며, SPR only는 residual damping technique를 썼을 때를 의미한다.

표 1.에 결과를 요약하였으며, 계산 격자가 줄어들었지만, 결과는 conventional solver와 비교하여, 거의 정확함을 알 수 있다.

▪ 표 1. Results summary

NACA0012 Airfoil		Iteration Number	CPU Time	Comp. Ratio	Lift Coefficient	Difference (%)
Subsonic (Ma=0.3, AOA=5)	Conventional solver	3625	1328.79		0.5629	
	SPR with stabilization, and residual damping technique	1865	523.95	3.61	0.5631	0.035
	SPR (the above) + variable grid spacing technique	1789	603.79	4.23	0.5630	0.017

CONCLUSIONS

본 연구에서는 SPR방법을 이용하여 Euler 방정식의 공간 정확도를 유지하면서 기존의 Euler 수치해석 방법의 계산 효율성을 증대시키는 방법을 제안하였다. 본 SPR방법은 등간격이 아닌 격자간격의 변화를 고려한 4차 보간식을 이용하고 또한 유동 특성에 따라 데이터 표현의 차수가 변하도록 하였다. 한편 기존의 상수 값을 이용한 threshold 값 대신 격자간격 정보를 고려한 threshold 값을 사용, 정상 상태해의 공간 정확도를 원래의 수치해석 방법의 수준 그대로 유지하도록 하였다. 또한 stabilization technique, residual damping technique을 통하여 계산의 안정성과 수렴 가속화를 더욱 증대시켰다. 본 수치 실험 결과, 압축률을 4.23으로 높임으로써 25% 정도의 격자만으로도 계산이 가능하였고, 50.8%의 iteration 수와 54.6%의 CPU time을 감소시킴으로서 계산 시간과 데이터 저장 공간을 획기적으로 줄일 수 있었다. 또한 SPR방법은 쉽게 3차원 오일러 방정식과 보다 복잡한 Navier-Stokes 방정식에 확대 적용이 가능하며, 다른 수렴 가속화 기법과 완전히 독립적이므로 다중격자법(multigrid method)등과 같이 사용된다면 계산 효율을 한층 더 높일 수 있을 것이다.

참고문헌

1. Bacry. E., Mallat. S., Papanicolaou. G., "A wavelet based space-time adaptive numerical method for partial differential equation," *Math. Model. Numer. Anal.*, Vol. 26, 1992, pp. 793~834.
2. Holmström. M., "Adaptive wavelet method for hyperbolic PDEs," *Sci. Comput.*, Vol. 13, 1992, pp. 19~49.
3. Mats Holmström, "Solving Hyperbolic PDEs Using Interpolating Wavelets," *SIAM J. Sci. Comp.*, Vol. 21, 1999, pp.405~420.
4. Sjögreen. B., "Numerical experiments with the multiresolution scheme for the compressible Euler equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 117, 1995, pp. 251~261.
5. J. M. De Villiers, K. M. Goosen, B. M. Herbst, "Dubuc-Deslauriers Subdivision for Finite Sequences and Interpolation Wavelets on an Interval," *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 35, 2003, pp. 423~452.