금오공과대학교 2001 전국고교생 수학경시대회 제2교시 문제 답안

1. 주어진 연립부등식을

$$\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \cdots ㉠ \\ cx^2 - bx + a < 0 \cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하자. 먼저, 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 두 근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하면

$$\alpha + \beta = \frac{b}{a} > 0, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$$

이고, 따라서 이 방정식의 두 근은 모두 양수이다. 한편, 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$ 에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$$\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c = 0, \quad 즉, \quad cx^2 - bx + a = 0$$

이므로 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ $\left(0 < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}\right)$이다. 따라서

$$㉠의 \text{ 해 : } \alpha < x < \beta, \qquad ㉡ \text{ 의 해 : } \frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$$

이고, 이로부터 위의 연립부등식이 해를 갖기 위한 조건은

$$\alpha < \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\beta} < \beta,$$

임을 얻는다. 그런데 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 이므로 $\alpha < 1 < \beta$ 이다. 즉, 방정식

$$f(x) = ax^2 - bx + c = 0$$

의 두 근 사이에 1 이 존재하는 것이다. 그러므로

$$f(1) = a - b + c < 0$$

즉,

$$a + c < b .$$

2. $\sqrt{x} = \sqrt{2232} - \sqrt{y}$ 의 양변을 제곱하면

$$x = 2232 - 2\sqrt{2232y} + y .$$

한편, $2232 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 31$ 이므로 $\sqrt{2232y} = 6\sqrt{62y}$ 이다. 따라서 x가 정수가 되기 위해서는 $\sqrt{62y}$ 가 정수가 되어야 하고, 이로부터

$$y = 62m^2, \quad (단,\ m은\ 음이\ 아닌\ 정수),$$

같은 방법으로,

$$x = 62n^2, \quad (단,\ n은\ 음이\ 아닌\ 정수)$$

를 얻는다. 또한 이 때,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{62}m + \sqrt{62}n = \sqrt{62}(m+n),$$

$$2232 = 6\sqrt{62}$$

이 성립한다. 그러므로, $m + n = 6$ 이고, 이로부터 (m, n)을 집합

$$\{(0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,0)\}$$

의 원소에 대응시킬 때마다 음이 아닌 서로 다른 7쌍의 정수 해 (x, y)를 얻을 수 있다.

3. 가정의 조건으로부터 모든 $x \in R^+$ 에 대하여

$$f(f(x)) = f(1 \cdot f(x)) = xf(1) \quad \cdots \quad (*)$$

이 성립한다.

(1) $f(1) \in R^+$ 이므로 $f(1) \neq 0$ 이고, $\frac{n}{f(1)} \in R^+$ 이다. 그러므로

$$m = f\left(\frac{n}{f(1)}\right)$$

이라 놓으면 (*) 에 의하여

$$f(m) = f\left(f\left(\frac{n}{f(1)}\right)\right) = \frac{n}{f(1)} f(1) = n$$

이다.

(2) 위 (1) 에 의하여 함수 f 는 위로의 함수이다. 그러므로 $f(c) = 1$ 을 만족하는 상수 $c \in R^+$ 를 택할 수 있고, 이 때,

$$f(1) = f(1 \cdot f(c)) = c\, f(1)$$

이 성립한다. 그런데 $f(1) \neq 0$ 이므로 $c = 1$ 이고 따라서

$$f(1) = 1$$

이다. 이제, 이것을 (*)에 대입하면, 모든 $x \in R^+$에 대하여

$$f(f(x)) = x$$

이 성립하고, 이로부터 $f = f^{-1}$ 이다.

4. x—축과 y—축의 절편점이 각각 a, b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

이다. 한편 아래 그림의 $\triangle OAC$에서 $\cos\theta=\frac{m}{a}$ 이고 $\triangle OBC$에서 $\sin\theta=\frac{m}{b}$ 이므로

$$a=\frac{m}{\cos\theta} \quad \text{이고,} \quad b=\frac{m}{\sin\theta}$$

이다. 따라서 구하고자 하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{x}{\frac{m}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{m}{\sin\theta}}=\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{m}=1$$

즉,

$$x\cos\theta+y\sin\theta=m$$

이다.

한편

$$2x-y+5=0\ ;\quad 2x-y=-5\ ;\quad \frac{x}{-5/2}+\frac{y}{5}=1$$

이므로

$$a=\frac{m}{\cos\theta}=-\frac{5}{2}\ ,\quad b=\frac{m}{\sin\theta}=5$$

이고

$$\left(\frac{\cos\theta}{m}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{m}\right)^2=\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$$

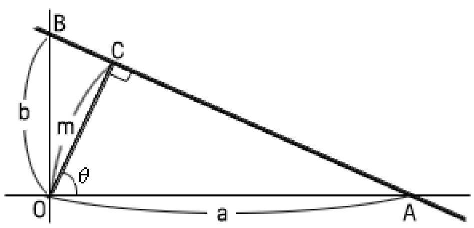
이다. 그러므로 $m^2=5$ 이고, m은 원점으로부터 직선까지의 거리이므로 $m>0$이다. 따라서 $m=\sqrt{5}$ 이고,

$$\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

이다. 그러므로 주어진 직선의 방정식에 대한 Hesse의 표준형은

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y=\sqrt{5}$$

이고, 원점으로부터 직선까지의 거리는 $m=\sqrt{5}$ 이다.



5. (1) $\alpha\beta = 5^4$이므로 $\log_5\alpha + \log_5\beta = 4$이고, 조건에 의하여

$$(\log_5\alpha)(\log_5\beta) = a^2 - 3a$$

이므로 $\log_5\alpha$, $\log_5\beta$는 2차 방정식

$$t^2 - 4t + a^2 - 3a = 0$$

의 두 실근이다. 따라서 판별식 D는 $D = 4 - (a^2 - 3a) \geq 0$을 만족해야 한다. 즉, 부등식 $a^2 - 3a - 4 \leq 0$ 의 해집합을 구하면 $-1 \leq a \leq 4$이다.

(2) $K = \alpha^A 5^B$에 밑이 5인 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log_5 K &= A\log_5\alpha + B \\ &= (\log_5\alpha)(\log_5\beta) + b^2 + ab \\ &= a^2 - 3a + b^2 + ab \\ &= \left(a + \frac{b-3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

그러므로 $a = 2, b = -1$일 때, $\log_5 K$는 최소값 -3을 갖는다. 즉, K의 최소값은 $5^{-3} = 1/125$이다.

6. 만약 e가 유리수라 하면, 어떤 자연수 m를 곱하여 자연수가 된다. 따라서

$$e \cdot m! = m! + m! + \frac{m!}{2!} + \cdots + \frac{m!}{m!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{m!}{n!}$$

도 자연수이다. 그러므로

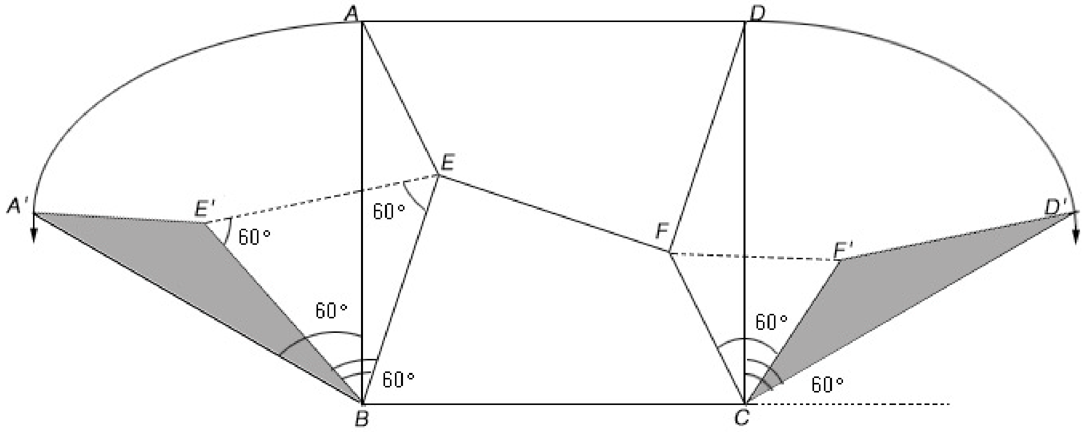
$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{m!}{n!} = \frac{m!}{(m+1)!} + \frac{m!}{(m+2)!} + \frac{m!}{(m+3)!} + \cdots$$

도 자연수이어야 한다. 그런데 이 수는

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{m!}{n!} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^3} + \cdots = \frac{1}{m} < 1$$

로부터 1보다 작은 수이다. 이러한 모순은 자연상수 e가 유리수라고 가정하여 생긴 것이다. 그러므로 e는 유리수가 아니다.

7. 다음 그림과 같이 $\triangle AEB$ 와 $\triangle DFC$ 를 좌, 우로 각각 60° 씩 회전하면,



$$\overline{AE}+\overline{EB}=\overline{A'E'}+\overline{E'B}=\overline{A'E'}+\overline{E'E}$$

$$\overline{DF}+\overline{FC}=\overline{D'F'}+\overline{F'C}=\overline{D'F'}+\overline{F'F}$$

이고, 따라서

$$\overline{AE}+\overline{EB}+\overline{EF}+\overline{DF}+\overline{FC}=\overline{A'E'}+\overline{E'E}+\overline{EF}+\overline{FF'}+\overline{F'D'}.$$

그러므로 주어진 문제는,

“ 두 고정 점 A', D' 으로부터 $\overline{A'E'}+\overline{E'E}+\overline{EF}+\overline{FF'}+\overline{F'D'}$ 의 값이 최소가 되도록 두 점 E, F 를 사각형 내부에 택하는 문제 ”

로 바꾸어 생각할 수 있고, 네 점 $E' E, F, F'$ 모두를 선분 $\overline{A'D'}$ 위의 점으로서 $\angle AEE'=60^{\circ}$, $\angle DFF'=60^{\circ}$ 를 만족하도록 택할 때 주어진 길이는 최소값 $\overline{A'D'}$ 를 가짐을 쉽게 알 수 있다. 따라서 아래 그림에서 선분 $\overline{A'D'}$ 의 길이를 구하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2+1=\sqrt{3}+1 \ .$$