금오공과대학교 2001 전국고교생 수학경시대회 제1교시 문제 답안

1. III 의 경우 $f(3)=1, f(3)=3$ 이므로 함수가 아니다.
IV 의 경우 $f(3)=\sqrt{3}\notin N$ 이므로 함수가 아니다.
V 의 경우 $f(30)=0\notin N$ 이므로 함수가 아니다.

2. (가) "소수는 무한히 많다"를 귀류법으로 증명한 것이다.
(나) $p=p_i$ 로 놓으면, p는 N 을 나누고 동시에 $p_1p_2\cdots p_n$ 을 나누므로 p 는

$$N-p_1p_2\cdots p_n=1$$

을 나눈다. <답> ②

3. $8^3=512<625<729=9^3$ 이므로

$$8<\sqrt[3]{625}<9 \cdots ㉠$$

또한, $7^2=49<210<343=7^3$ 이므로

$$2<\log_7 210<3 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡ 으로부터

$$\frac{5}{2}=2.5<\frac{\sqrt[3]{625}-\log_7 210}{2}<\frac{7}{2}=3.5$$

그러므로 주어진 수에 가장 가까운 정수는 3.

4. $\alpha=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 라 놓으면, α는 실수이고

$$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=-1.$$

따라서

$$\alpha^3=(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3+3(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^2(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})+3(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^2+(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3$$
$$=(2-\sqrt{5})+3(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})(-1)+3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})(-1)+(2+\sqrt{5})=4-3\alpha.$$

그러므로 α 는 방정식 $x^3+3x-4=0$ 의 실근이다. 한편

$$x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$$

이고 방정식 $x^2+x+4=0$ 은 허근을 갖는다. 따라서 $\alpha=1$.

5. $\alpha=\sin(\pi/12)$, $\beta=\cos(\pi/12)$ 라 놓으면,

$$\alpha+\beta=b,\quad \alpha\beta=\frac{1}{4},\quad \alpha^2+\beta^2=1.$$

따라서

$$b^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=\frac{3}{2},\qquad b=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

6. $a = x-y$, $b = \dfrac{4xy}{x-y}$ 라 놓으면, $a > 0$, $b = \dfrac{16}{x-y} > 0$. 따라서

$$\frac{(x+y)^2}{x-y} = x-y+\frac{4xy}{x-y} = a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{16} = 8.$$

한편, $a = b$ 인 경우가 가능한가를 알아보기 위하여 $x-y = \dfrac{4xy}{x-y}$ 라 놓으면,

$y = \dfrac{4}{x}$ 이므로 방정식 $x^2 - 24 + \dfrac{16}{x^2} = 0$ 이 성립하고.

$$x^2 - 24 + \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 24x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \pm \sqrt{144-16} = 12 \pm 2\sqrt{32}.$$

그러므로 $x = \sqrt{12+2\sqrt{32}} = 2+2\sqrt{2}$ 로 택하면

$$y = \frac{4}{2+2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2, \qquad x > y > 0$$

이고, 이들 x, y 값에서 주어진 식은 최소값 8을 갖는다.

7. $x^{2001} - 1 = (x-1)(x^{2000} + x^{1999} + \cdots + 1)$ 이므로

$$x^{2000} + x^{1999} + \cdots + 1 = (x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_{2000})$$

이 성립한다. 이 식이 항등식이므로 좌, 우변에 $x=1$ 을 대입하면

$$(1-\omega_1)(1-\omega_2)\cdots(1-\omega_{2000}) = 1+1+\cdots+1 = 2001.$$

8. $f(x) = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$f(\alpha) = \alpha^3 - p = 0, \quad f(\beta) = \beta^3 - p = 0, \quad f(\gamma) = \gamma^3 - p = 0.$$

따라서

$$\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3 = p.$$

한편,

$$\begin{aligned} g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma) &= (\alpha^3 - 2\alpha)(\beta^3 - 2\beta)(\gamma^3 - 2\gamma) \\ &= (p-2\alpha)(p-2\beta)(p-2\gamma) \\ &= 8\left(\frac{p}{2}-\alpha\right)\left(\frac{p}{2}-\beta\right)\left(\frac{p}{2}-\gamma\right) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

그런데

$$f(x) = x^3 - p = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이므로

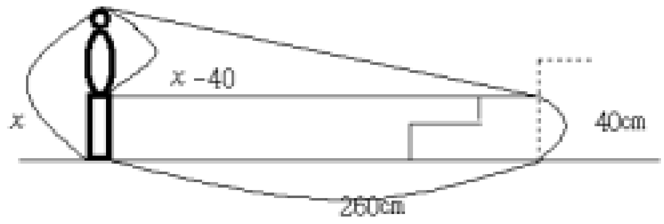
$$f\left(\frac{p}{2}\right) = \left(\frac{p}{2}-\alpha\right)\left(\frac{p}{2}-\beta\right)\left(\frac{p}{2}-\gamma\right) = \frac{p^3}{8} - p.$$

이것을 ① 에 대입하면

$$g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma) = p^3 - 8p = p(p-\sqrt{8})(p+\sqrt{8})$$

이고, 이로부터 $p = 0$, $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$

9.



그림자의 길이를 비교하면 다음 비례식이 성립한다.

$$1 : 2 = (x - 40) : 260$$

따라서 $x = 170\ cm$.

10. $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = k$ 라 두면, $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 는 4차 방정식 $f(x) - k = 0$, 즉

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + (d - k) = 0$$

의 네 근이다. 따라서

$$-a = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

이고, 이로부터 $a = -10$.

11. $f(x)$ 가 실 계수 다항식이고 $f(3 + i) = 1 - i$ 이므로

$$f(3 - i) = 1 - (-i) = 1 + i.$$

따라서

$$\frac{2}{f(3 - i)} = \frac{2}{1 + i} = 1 - i.$$

12. A가 한 계단 내려오는데 걸리는 시간을 t라 하면, B가 한 계단 내려오는데 걸리는 시간은 $2t$. 따라서 다음 비례식이 성립한다.

$$24t : (n - 24) = (16 \times 2t) : (n - 16).$$

이 비례식으로부터 $n = 48$.

13. $\overline{AB} \,//\, \overline{EC}$, $\overline{AE} \,//\, \overline{BD}$ 이므로 □ $ABPE$ 는 평행사변형이다. 그러므로

$$\triangle PBE \text{의 면적} = \triangle ABE \text{의 면적} = \triangle CDE \text{의 면적} = 1.$$

또 $\triangle PBE \backsim \triangle PCD$ 이므로,

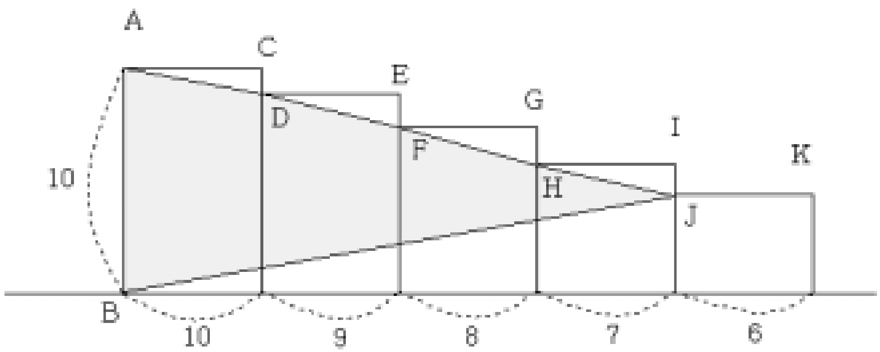
$$\frac{\triangle PBE \text{의 면적}}{\triangle PCD \text{의 면적}} = \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PD}}\right)^2 = \frac{1}{s} \quad \cdots ㉠$$

$$\frac{\triangle PBC \text{의 면적}}{\triangle PCD \text{의 면적}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PD}} = \frac{1-s}{s} \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\left(\frac{1-s}{s}\right)^2 = \frac{1}{s}$ 이고, 이로부터

$$s = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\because\ 0 < s < 1).$$

14.



넓이가 170 cm^2 보다 크게 되는 순간의 $\triangle AB\alpha$ 의 높이를 h 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 10 \times h = 170, \quad h = 34.$$

한편, $h = 34 = 10 + 9 + 8 + 7$ 이므로 이 순간은 α가 J에 있을 때이고, 이때까지 점 α 가 움직인 전체 거리는

$$34 + 1 \times 4 = 38(cm).$$

따라서, α의 속도가 매초 2 이므로 구하는 시간은

$$38 \div 2 = 19(\text{초}).$$

15.

$$\triangle ABC \text{ 의 면적} = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \alpha + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \beta + \frac{1}{2}\cdot \sqrt{5}\cdot \gamma$$

따라서

$$\alpha + 2\beta + \sqrt{5}\gamma = 2.$$

그러므로, 체비셰프 부등식에 의하여

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1^2 + 2^2 + \sqrt{5}^2) \ge (\alpha + 2\beta + \sqrt{5}\gamma)^2 = 4.$$

따라서

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ge \frac{2}{5}.$$

16.

① x가 유리수이면 $f(x)=0$. 따라서 $f(f(x))=f(0)=0$.
x가 무리수이면 $f(x)=1$. 따라서 $f(f(x))=f(1)=0$.
그러므로 항상 $f(f(x))=0$.

② x가 유리수이면 $f(x)=f(x^2)=0$.
x가 무리수이면 $f(x)=1$이고 $f(x^2)=1$ 또는 0.
따라서 항상 $f(x) \ge f(x^2)$.

③ $x=\sqrt{2}$이면 $f(x^2)=f(2)=0$, $f(x^3)=f(2\sqrt{2})=1$.
따라서 성립하지 않는다.

④ x가 무리수이면 $\frac{1}{x}$도 무리수이다. 따라서 $f\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

⑤ $f(\sqrt{x})=0$ 이면 $f(x^2)=0$.
$f(\sqrt{x})=1$이면 $\sqrt{x}$가 무리수이므로 $f(x^2)=1$ 또는 0.
따라서 항상 $f(\sqrt{x}) \ge f(x^2)$. <답> ③

17. 세 변의 길이를 x, x, y 라 하면 $2x > y > 0$ 이고 $2x + y = 18$.

(i) $2x = 18 - y > y$ 에서 $y < 9$

(ii) $y = 18 - 2x > 0$ 에서 $x < 9$

(iii) $y = 18 - 2x = 2(9 - x)$

따라서, y 는 짝수이고, (i),(ii),(iii)에 의해서

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$$

그러므로, 구하는 이등변삼각형은 4개이다.