

제20회 수학 경시대회 시험 문제

※ 답안은 답안지에 작성하시고, 모든 답에 대한 풀이과정을 반드시 쓰시오.

1. π 는 원주율이다. $\pi = 3.14 \dots$ 를 사용하지 않고 도형을 그려서

$$\pi < 8 \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

임을 증명하시오.

2. $x_0 = 1$ 이고 $x_n = \frac{5+3x_{n-1}}{5+x_{n-1}}$, $n = 1, 2, \dots$ 일 때,

수열 $\{x_n\}$ 의 극한이 존재함을 보이시오.

3. 자연로그함수를 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ ($x > 0$) 로 정의할 때, 등식

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$$

을 증명하시오.

4. $(n+1)$ 개의 서로 다른 실수 x_0, x_1, \dots, x_n 들과 임의의 실수 y_0, y_1, \dots, y_n 에 대해 $p_n(x_i) = y_i$ ($0 \leq i \leq n$)을 만족하는 n 차 이하의 다항식 $p_n(x)$ 가 유일하게 존재함을 보이시오.

5. 홀수인 소수 p 가 $p = 3m + 2$ (m 은 정수)형태의 수라 하자.

$$\sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \frac{b}{a} \quad (a, b \text{는 서로 소})$$

로 표현했을 때, p 는 b 의 약수가 됨을 증명하시오.