

제 19 회 전국고교수학학력경시대회 시험문제

(제한시간 100분)

[유의사항] 답안은 답안지에 작성하시고, 모든 답에 대한 풀이과정을 반드시 쓰시오.

1. a, b, c 에 관한 다항식 $a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)$ 이 $a+b+c$ 를 인수로 갖게 되는 양의정수 n 을 모두 구하여라.

2. 삼각형 ABC 와 내부의 점 D 가 다음의 두 가지 조건을 만족한다.

$$(i) \angle ADB = \angle ACB + 90^\circ.$$

$$(ii) \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

이때 $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC}$ 의 값이 항상 일정함을 보여라.

3. f 가 $[0, 1]$ 에서 연속이고 음이 아닌 실수값을 갖는 함수라고 하자. 이때 f 가

$$f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s) ds \quad (t \in [0, 1])$$

을 만족할 때 $f(t) \leq 1 + t \quad (t \in [0, 1])$ 임을 보여라.

4. $\tan^{-1}x$ 는 $\tan y = x$ 를 만족하는 $-\frac{\pi}{2}$ 와 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 있는 각(라디안 단위) y 를 의미한다.

(예를 들면 $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$ 이다.) 다음을 계산하여라.

$$\sum_{k=1}^{2000} \tan^{-1}\left(-1 + \frac{2001}{k}\right)$$