

금오공과대학교 2001 전국 고교생 수학경시대회 제2교시 문제

(제한시간 : 60분)

(유의사항) 모든 답안은 반드시 답안지에 작성하고 답에 대한 풀이과정을 명시하시오.

1. a, b, c 가 양의 실수일 때, 연립부등식

$$\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$$

이 해를 갖기 위한 필요충분조건을 구하여라 (a, b, c 를 포함하는 한 개의 부등식으로 나타낼 것). [30점]

2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2232}$ 를 만족하는 음이 아닌 정수들의 쌍 (x, y) 는 몇 쌍 있나? [20점]

3. 함수 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 가 모든 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여

$$f(af(b)) = bf(a)$$

를 만족한다. 여기서 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

(1) 실수 n 을 집합 \mathbb{R}^+ 의 임의의 원소라 할 때 $f(m) = n$ 을 만족하는 원소 $m \in \mathbb{R}^+$ 을 구하여라. [10점]

(2) 위 (1)에 의하여 함수 f 는 위로의 함수이다. 이를 이용하여 $f = f^{-1}$ 임을 증명하여라. [15점]

4. 원점에서 어떤 직선에 그은 수선의 길이가 m 이고, 이 수선이 x -축과 이루는 사이각이 θ 인 직선의 방정식은

$$x \cos \theta + y \sin \theta = m$$

으로 주어지는 것을 보여라(이것을 Hesse의 표준형이라 한다). 이 때, 직선의 방정식

$$2x - y + 5 = 0$$

을 Hesse의 표준형으로 고치고, 원점에서 이 직선까지의 거리 m 을 구하여라. [30점]

(뒷면으로)

5. 실수 a, α, β 사이에

$$\alpha\beta = 5^4, \quad (\log_5 \alpha)(\log_5 \beta) = a^2 - 3a$$

인 관계가 있다.

(1) a 가 취할 수 있는 값의 범위를 구하여라. [10점]

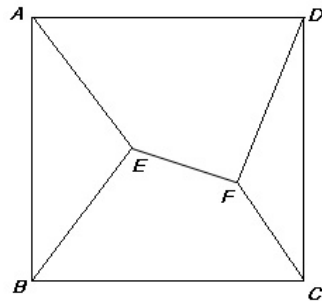
(2) $K = \alpha^A 5^B$ 이고, a 와 b 가 독립적으로 변한다고 한다. 이 때 K 의 최소값을 구하여라. 단, $A = \log_5 \beta$, $B = b^2 + ab$ 이고, b 는 실수이다. [10점]

6. 실수

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

는 무리수임을 증명하여라 (여기서, $0! = 1$, $n \geq 1$ 일 때 $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$ 이고, $-1 < r < 1$ 일 때 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ 이 성립한다). [20점]

7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 $ABCD$ 의 내부에 점 E, F 를 잡을 때 $\overline{AE} + \overline{EB} + \overline{EF} + \overline{DF} + \overline{FC}$ 의 최소값을 구하면? [20점]



< 수고 하셨습니다 >