

금오공과대학교 2001 전국 고교생 수학경시대회 제1교시 문제

(제한시간 : 80분)

(유의사항) 문제에 대한 풀이과정은 생략하고 정답만을 답안지에 쓰시오.

1. $N = \{n | n \text{은 양의 정수}\}$ 에 대하여 다음과 같은 대응 가운데 ‘ N 에서 N 으로’의 함수가 되지 못하는 것을 모두 고르면?

- I. N 의 원소 n 에 n 의 약수의 개수를 대응시킨다. 단, 1과 그 자신도 약수로 본다.
- II. N 의 원소 n 에 n 의 자리수를 대응시킨다.
- III. N 의 홀수 원소에는 1, 짝수 원소에는 2, 소수 원소에는 3을 대응시킨다.
- IV. N 의 원소 n 에 n 의 제곱근 \sqrt{n} 을 대응시킨다.
- V. N 의 원소 n 에 숫자 n 의 일의 자리수를 대응시킨다.

- ① I, II ② III, IV ③ I, II, III ④ I, II, IV ⑤ III, IV, V

2. 다음 명제는 (가)를 증명한 것이다.

유한개의 소수 p_1, p_2, \dots, p_n 만이 존재한다고 가정하고 $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ 이라 하자. 그러면 $N > 1$ 이므로 N 의 소인수 p 가 존재하고, 가정으로부터 p 는 p_1, p_2, \dots, p_n 중의 하나와 일치한다. 이제 $p = p_i$ 라 놓으면 (나)가 되는데 이는 모순이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) 소수는 무한히 많다 ② (가) 소수는 무한히 많다
 (나) p 는 합성수 (나) p 는 1을 나눈다
- ③ (가) 소수는 합성수 보다 많다 ④ (가) 소수는 유한 개 있다
 (나) $p < N$ (나) $N+1$ 은 p 의 배수
- ⑤ (가) 소수는 불규칙적으로 존재한다
 (나) N 은 소수

3. 실수 $\frac{\sqrt[3]{625} - \log_7 210}{2}$ 에 가장 가까운 정수는?

4. 다음 중 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ 와 같은 수는?

- ① 1 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $\sqrt[3]{4}-1$ ④ $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

5. 방정식 $x^2 - bx + \frac{1}{4} = 0$ 의 두 근이 $\sin(\pi/12), \cos(\pi/12)$ 일 때 b 는 얼마인가?

6. 모든 실수 $a \geq 0, b \geq 0$ 에 대하여 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 은 항상 성립하며 특히 등호는 $a=b$ 일 때만 성립한다. $x > y > 0$ 이고 $xy=4$ 일 때 $\frac{(x+y)^2}{x-y}$ 의 최소값은?

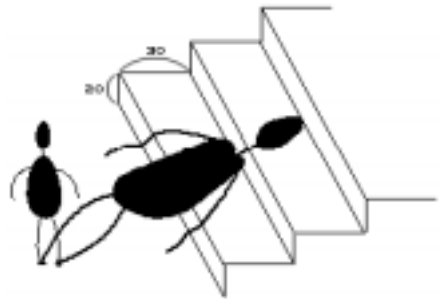
7. 방정식 $x^{2001} = 1$ 의 허근을 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{2000}$ 이라고 할 때,

$$(1 - \omega_1)(1 - \omega_2)(1 - \omega_3) \cdots (1 - \omega_{2000})$$

의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

8. $f(x) = x^3 - p, g(x) = x^3 - 2x$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $g(\alpha) \cdot g(\beta) \cdot g(\gamma)$ 를 p 로 나타낸 함수 $h(p)$ 에 대하여 $h(p) = 0$ 의 실근의 개수는? (단, 중근은 하나로 센다).

9. 그림과 같이 한 단의 높이가 $20cm$, 폭이 $30cm$ 인 계단이 있고, 계단의 하단 끝 지점으로 부터 $2m$ 떨어진 곳에 수연이가 서 있다. 수연이의 그림자가 그림과 같이 정확히 계단의 두 번째 단까지 이르고 있다면 수연이의 키는 얼마인가? (단, 현재 평지에서 높이 h 인 물체의 그림자의 길이는 $2h$ 이다).



10. 일반적으로 n 차 방정식 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ 의 n 개의 근의 합은 $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ 이다. 함수 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$ 를

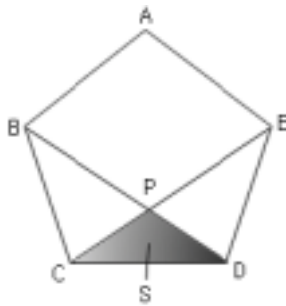
만족할 때 a 의 값은?

11. 실 계수 n 차 다항식 $f(x)$ 가 $f(3+i)=1-i$ 를 만족할 때, $\frac{2}{f(3-i)}$ 의 값은?

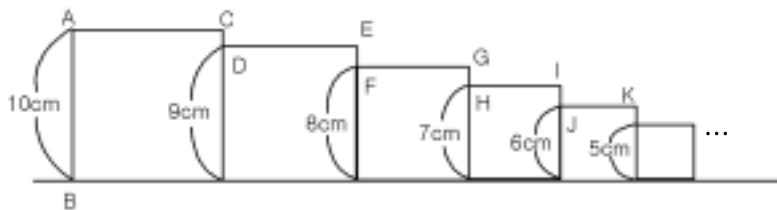
12. n 개의 계단으로 이루어지고 일정한 속도로 내려오는 에스컬레이터가 있다. 두 소년 A 와 B 가 각각 에스컬레이터를 타고 내려오면서 서로 일정한 속도로 1 걸음에 1계단씩 걸어서 내려온다. A 의 걸음걸이는 B 의 걸음걸이 보다 2배나 빠르고, A 는 24걸음만에, B 는 16걸음만에 에스컬레이터를 모두 내려왔다고 한다면, 에스컬레이터의 높이를 나타내는 계단의 수 n 의 값은?

13. 다음 그림과 같은 정오각형에서 두 대각선 \overline{BD} 와 \overline{EC} 의 교점을 P 라 하자.

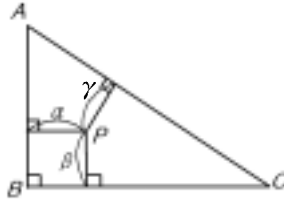
$\triangle ECD$ 의 넓이를 1이라 할 때, $\triangle PCD$ 의 넓이 s 는?



14. 다음 그림은 한 변의 길이가 $1cm$ 씩 작아지는 정사각형을 순서대로 나열한 것이다. 점 α 가 A 를 출발하여 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \dots$ 로 선분을 따라 매초 $2cm$ 씩 이동한다. 이 때, 만들어진 $\triangle AB\alpha$ 의 넓이가 $170cm^2$ 보다 크게 될 때는 출발하여 몇 초 후부터인가?



15. 직각 삼각형 ABC 에서 $B=90^\circ$, $AB=1$, $BC=2$ 로 주어져 있다. 이 삼각형 내부의 한 점 P 에서 변 AB , BC , CA 에 내린 수선의 길이를 각각 α , β , γ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 최소값은?



16. R 을 실수 전체의 집합이라 하고, 함수 $f: R \rightarrow R$ 를 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{가 유리수}) \\ 1 & (x \text{가 무리수}) \end{cases}$

로 정의할 때, 다음 중 거짓인 것은?

- ① 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = 0$ 이다.
 - ② 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(x^2)$ 이다.
 - ③ 모든 실수 x 에 대하여 $f(x^2) \geq f(x^3)$ 이다.
 - ④ 모든 무리수 x 에 대하여 $f(\frac{1}{x}) = 1$ 이다.
 - ⑤ 모든 양의 유리수 x 에 대하여 $f(\sqrt{x}) \geq f(x^2)$ 이다.
17. 세변의 길이의 합이 18인 삼각형 중에서 각 변의 길이가 모두 정수인 이등변삼각형의 개수는?

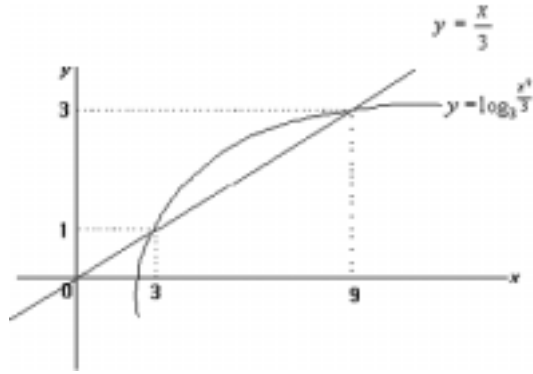
18. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x & : 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x & : 2 < x \leq 4 \end{cases}$ 와 $g(x) = \begin{cases} x & : 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & : 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 에 대하여 집합

$$\{x \in [0, 4] \mid \frac{1}{2} \leq g(f(x)) \leq 1\}$$

에 속하는 모든 구간의 길이의 합은?

19. 다음 그래프를 이용하여 부등식 $3^{(x+5)} < (x+2)^6$ (단, $x > -2$)의 해를 구하면

$a < x < \beta$ 이다. 이 때, $a \cdot \beta$ 의 값은?



20. 좌표평면에서 세 부등식 $3x+4y-16 < 0$, $3x-4y+10 > 0$, $y > 0$ 을 동시에 만족시키는 영역에 속하는 점 중에서 이 영역의 경계를 이루는 세 선분과의 거리가 모두 자연수인 점의 개수는?

<수고하셨습니다>