

금오공과대학교 2000 전국 고교생 수학경시대회 문제지

(제2교시, 제한시간 : 90분)

(유의사항) 모든 답안은 반드시 답안지에 작성하고 답에 대한 풀이과정을 명시하시오.

1. 피자를 칼로 두 번 자르면 최대 4 조각을 얻을 수 있다. 칼로 n 번 자른다면 최대 몇 조각을 얻을 수 있는가? 단, 칼로 자를 때 중간에서 자르기 시작하거나 중간에서 끝내지 않고 직선 모양으로 자른다고 하자. [8점]

2. x, y, z 가 양의 정수일 때, 방정식 $xyz = 8000$ 을 만족하는 서로 다른 해 (x, y, z) 의 개수를 구하여라. [15점]

3. 세 자리 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을

(각 자리수의 합) + (두 자리씩 곱한 것의 합) + (각 자리수의 곱)

이라 하자. 예를 들어 $n = 345$ 일 때,

$$f(n) = (3 + 4 + 5) + (3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3) + (3 \cdot 4 \cdot 5)$$

이다. 이 때, $\frac{n}{f(n)} = 1$ 이 되는 모든 세 자리 자연수 n 을 구하여라. [15점]

4. p, q 는 $p + q = 1$ 을 만족하는 임의의 양의 실수일 때, 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여

$$f(px + qy) \geq p \cdot f(x) + q \cdot f(y)$$

임을 보여라. 단 $x \geq 0, y \geq 0$. [10점]

5. 점 $(1, 3)$ 을 지나고 직선 $4x + 3y - 2 = 0$ 과 45° 의 각을 이루는 직선의 방정식을 구하여라. [20점]

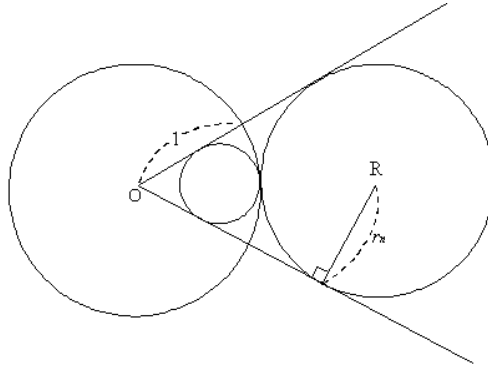
6. a_1, a_2, \dots, a_n 이 상수일 때, $f(x) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (x - a_i)(x - a_j) \right]$ 로 정의된 함수 f 는 조

건 $\int_0^1 f'(x) dx = -n$ 을 만족한다.

(1) $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 를 구하여라. [10점]

(2) $\int_0^1 f(x) dx$ 를 구하여라. [5점]

7. 중심이 O 이고 반지름이 1 인 원이 있다. 이 원의 내부에 반지름 $\frac{1}{n}$ 인 원들을 겹치지 않게 내접시킬 때 이들 내접원들의 개수를 A_n 이라 하자. 또, 그림과 같이 중심 O 로 부터 각 내접원에 그은 두 접선의 연장선에 접하고 주어진 원에 외접하는 외접원의 반지름을 r_n 이라 하자. 이 때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n A_n$ 을 구하여라 (힌트: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 임을 이용한다). [20점]



< 수고 하셨습니다 >