

금오공과대학교 2000 전국 고교생 수학경시대회 문제지

(제1교시, 제한시간 : 70분)

(유의사항) 모든 답안은 반드시 답안지에 작성하고 답에 대한 풀이과정을 명시하시오.

1. 지수 $a^{(b^c)}$ 는 간단히 a^{bc} 로 나타낸다. 실수 x 가 방정식

$$8^{2^x} - 3 \cdot 4^{2^x} - 2^{2^x} = 12$$

를 만족할 때, $\sqrt{2^{2^{2^x}}}$ 의 값을 구하여라. [8점]

2. 원점이 아닌 임의의 점 (a, b) 를 지나면서 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원은 항상 두 개 있다. 이들 두 원의 반지름의 곱을 구하여라. [8점]

3. a 가 3 보다 큰 정수이고 $k = a^2 + 1$ 가 홀수일 때,

$$S_k = \{ k - n^2 \mid n \text{ 은 양의 정수이고 } n^2 < k \}$$

이라 하자. 이 때 집합 S_k 내에는 $c \mid d$ 인 서로 다른 두 정수 c, d 가 존재함을 보여라 (여기서 기호 $c \mid d$ 는 ‘ c 는 d 를 나눈다’ 는 뜻이다). [10점]

4. $f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 일 때, 다음 등식을 만족하는 $g(n)$ 을 구하여라 (단, $n \geq 2$). [15점]

$$\sum_{l=1}^{n-1} f(l) = g(n) \{ f(n) - 1 \}.$$

5. $x \geq 2$ 일 때 $\log_2 x$ 의 정수부분을 $f(x)$ 라 하자. 이 때 $\sum_{k=2}^{1000} f(k)$ 의 값을 구하여라. [15점]

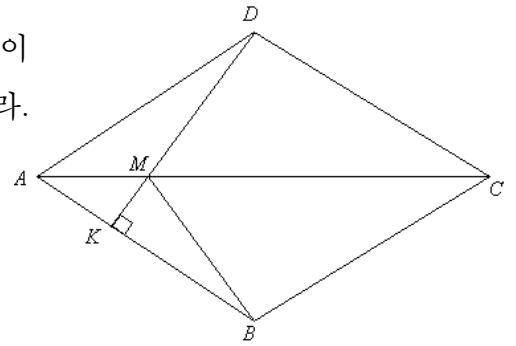
6. 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 모든 실수 x, y 에 대하여

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{2} \leq (x - y)^2 \sin^2(x - y)$$

를 만족하면 f 는 상수함수임을 증명하여라. [10점]

7. 양의 정수 a, b, c 와 정수 d 는 관계식 $\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + d = 10$ 을 만족한다. 이 때 $a + b + c + d$ 의 최소값을 구하여라. [15점]

8. 그림과 같이 마름모 $ABCD$ 의 한 변 \overline{AB} 에 그은 수선 \overline{DK} 는 대각선 \overline{AC} 와 점 M 에서 만난다. \overline{DK} 의 길이가 4이고 $\overline{AK} : \overline{KB} = 1 : 2$ 일 때, \overline{MB} 의 길이를 구하여라.
[15점]



< 끝 >