금오공과대학교 2000 전국 고교생 수학경시대회 제2교시 문제 답안

1. 칼로 2 번 자르면 최대 4 조각이 생긴다. 그리고 칼로 3 번 자르면 최대 3 조각이 더 얻어져서(새로 자르는 3 번째 칼 자국이 기존의 두 개의 칼 자국과 모두 만나는 경우) 모두 7 조각이 생긴다. 마찬가지로 n 번 칼로 자르는 경우, 최대한의 조각 을 얻으려면 이미 있는 $(n-1)$ 번의 칼자국과 모두 만나도록 잘라야 한다. 그리고 이 경우에는 n 개의 조각이 더 생기게 된다. 따라서 구하는 최대 개수는 다음과 같다.

$$1+1+2+3+\cdots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. 8000 을 소인수 분해하면, $xyz=8000=2^6 5^3$ 이므로

$$x=2^a 5^d,\quad y=2^b 5^e,\quad z=2^c 5^f \quad (\text{단, } a,b,c,d,e,f \text{ 는 음이 아닌 정수})$$

로 놓을 수 있다. 따라서

$$2^{a+b+c}5^{d+e+f}=xyz=8000=2^6 5^3$$

이고, 이로부터 주어진 방정식의 서로 다른 해의 개수를 구하기 위해서는 두 식

$$a+b+c=6, \qquad d+e+f=3$$

을 만족하는 음이 아닌 정수들의 쌍 (a,b,c,d,e,f) 의 개수를 구하면 된다. 먼저 각 $a\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 에 대하여 $b+c=6-a$ 를 만족하는 음이 아닌 정수들의 쌍 (b,c) 의 개수는 $7-a$ 이다. 따라서 $a+b+c=6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수들의 쌍 (a,b,c) 의 개수는

$$\sum_{a=0}^{6}(7-a)=7+6+5+4+3+2+1=28$$

이다. 같은 방법으로 $d+e+f=3$ 을 만족하는 음이 아닌 정수들의 쌍 (d,e,f) 의 개수를 구하면,

$$\sum_{d=0}^{3}(4-d)=4+3+2+1=10$$

이다. 그러므로 음이 아닌 정수들의 쌍 (a,b,c,d,e,f) 의 개수는

$$28\times 10=280.$$

3. 세 자리 자연수 n 을

$$n=100a+10b+c \qquad (1\le a\le 9,\quad 0\le b\le 9,\quad 0\le c\le 9)$$

라 하자. 그러면 함수 f 의 정의로부터

$$f(n) = a + b + c + ab + bc + ac + abc = (1 + a)(1 + b)(1 + c) - 1$$

이다. 한편, 가정에서 $f(n) = n = 100a + 10b + c$ 이라 하였으므로

$$100a + 10b + c = (1 + a)(1 + b)(1 + c) - 1$$

이 성립하며, 이 식의 양변을 정리하면

$$\{100 - (1 + b)(1 + c)\}a = b(c - 9)$$

를 얻는다. 그런데 $\{100 - (1 + b)(1 + c)\}a \geq 0$ 이고 $b(c - 9) \leq 0$ 이므로

$$\{100 - (1 + b)(1 + c)\}a = b(c - 9) = 0$$

이다. 따라서

$$c = 9, \quad (1 + b)(1 + c) = 100$$

이고, 이로부터

$$b = 9$$

이다. 한편, a 는 $1 \leq a \leq 9$ 인 어떤 수를 택하여도 무방하다. 그러므로 구하고자 하는 n 값들은

$$n = 199, \quad 299, \quad 399, \quad 499, \quad 599, \quad 699, \quad 799, \quad 899, \quad 999.$$

4. $$f(px + qy) \geq p \cdot f(x) + q \cdot f(y) \iff \{f(px + qy)\}^2 \geq \{p \cdot f(x) + q \cdot f(y)\}^2$$

이므로, 우변의 부등식이 성립함을 밝히자.

$$\begin{aligned}
&\{f(px + qy)\}^2 - \{p \cdot f(x) + q \cdot f(y)\}^2 \\
= \ & (px + qy) - (p^2 x + 2pq\sqrt{xy} + q^2 y) \\
= \ & p(1 - p)x - 2pq\sqrt{xy} + q(1 - q)y \\
= \ & pq(x - 2\sqrt{xy} + y) \\
= \ & pq(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

그러므로 $f(px + qy) \geq p \cdot f(x) + q \cdot f(y)$ 가 성립한다.

5. 한 직선 L 과 $45°$의 각을 이루는 직선 N 은 직선 L 과 그에 수직인 직선 M 이 이루는 각 $(90°)$ 의 이등분선이다. 즉, 두 직선 L 과 M 에서 같은 거리에 있는 점들의 집합이 된다. 한편, 문제에 주어진 직선 $L : 4x + 3y - 2 = 0$ 과 수직인 직선의 방정식은 $M : -3x + 4y + b = 0$ (b 는 실수) 의 형태이다. 그런데 구하고자 하는 직선 N 이 점

$(1,3)$ 을 지나므로, 점 $(1,3)$ 으로 부터 두 직선 $L: 4x+3y-2=0, \quad M: -3x+4y+b=0$ 에 이르는 거리는 서로 같다. 즉,

$$\frac{|4\cdot 1+3\cdot 3-2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-3\cdot 1+4\cdot 3+b|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

이다. 따라서 $11 = |9+b|$ 이고, 이로 부터

$$b = 2 \text{ 또는 } -20.$$

(i) $b=2$ 일 때 ;

두 직선 $4x+3y-2=0, \quad -3x+4y+2=0$ 으로 부터 같은 거리에 있는 점을 (x,y) 라 하면,

$$\frac{|4\cdot x+3\cdot y-2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-3\cdot x+4\cdot y+2|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

이다. 따라서

$$4x+3y-2 = -3x+4y+2 \quad \text{또는} \quad 4x+3y-2 = 3x-4y-2$$

가 성립하고, 이 두 식을 정리하면

$$7x-y-4=0 \quad \text{또는} \quad x+7y=0$$

을 얻는다. 그런데 문제의 가정에서 점 $(1,3)$ 을 지난다 하였으므로 $7x-y-4=0$ 이 조건에 맞는 직선이다.

(ii) $b=-20$ 인 경우도 위 (i) 과 같은 방법을 이용하면 직선 $x+7y-22=0$ 을 얻을 수 있다.

그러므로 구하는 직선의 방정식은 $7x-y-4=0$ 과 $x+7y-22=0$ 이다.

6. (1) 먼저

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)(x-a_j)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[(x-a_j)\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)\right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n}(x-a_j)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)\right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)\right]^2 = (nx-S_n)^2 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)dx &= \Big[f(x)\Big]_0^1 \\ &= \Big[(nx-S_n)^2\Big]_0^1 \\ &= (n-S_n)^2 - {S_n}^2 \\ &= n^2 - 2nS_n.\end{aligned}$$

그런데 가정에서 $\displaystyle\int_0^1 f'(x) = -n$ 이라 하였으므로 $n^2 - 2nS_n = -n$. 그러므로

$$S_n = \frac{n+1}{2}.$$

(2) 위 (1)의 풀이에 의하여 $f(x) = \left(nx - \dfrac{n+1}{2}\right)^2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \left(nx - \frac{n+1}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}n^2x^3 - 2n(n+1)x^2 + (n+1)^2x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}(n^2+3).\end{aligned}$$

7. 아래 그림에서 $\triangle POQ$ 와 $\triangle ROS$ 는 닮은 꼴 이므로

$$\overline{OP} : \overline{PQ} = \overline{OR} : \overline{RS}, \quad 즉 \left(1 - \frac{1}{n}\right) : \frac{1}{n} = (1+r_n) : r_n$$

이 성립하며, 이 비례식을 풀면

$$r_n = \frac{1}{n-2}$$

을 얻는다. 한편, $\angle ROS$ 를 θ_n 이라 하면, 주어진 원의 내부에 접하는 원들의 개수는 $A_n = \left[\dfrac{2\pi}{2\theta_n}\right] = \left[\dfrac{\pi}{\theta_n}\right]$ 이고 따라서 $\dfrac{\pi}{\theta_n} - 1 < A_n \le \dfrac{\pi}{\theta_n}$ 이다. 여기서, $[\,\cdot\,]$ 는 최대정수함수(또는 Gauss 함수)이다. 이로부터 $n \ge 3$ 일 때, 부등식

$$r_n\left(\frac{\pi}{\theta_n} - 1\right) < r_n A_n \le r_n \frac{\pi}{\theta_n} \tag{1}$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데,

$$\sin\theta_n = \frac{r_n}{1+r_n} = \frac{\dfrac{1}{n-2}}{1 + \dfrac{1}{n-2}} = \frac{1}{n-1}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} r_n \,\frac{\pi}{\theta_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-2}\,\frac{\pi}{\theta_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi\,\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\,\frac{n-1}{n-2} = \pi\end{aligned}$$

이고, 따라서

$$\lim_{n\to\infty} r_n\left(\frac{\pi}{\theta_n} - 1\right) = \pi - \lim_{n\to\infty} r_n = \pi$$

이다. 그러므로, 이 두 극한과 위 부등식 (1)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} r_n A_n = \pi.$$