금오공과대학교 2000 전국 고교생 수학경시대회 제1교시 문제 답안

1. $y = 2^{2^x}$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$y^3 - 3y^2 - y - 12 = 0, \quad \text{즉} \quad (y-4)(y^2+y+3) = 0$$

이고, 이 방정식으로부터 $y = 4$ 이다. 따라서 구하는 값은

$$\sqrt{2^{2^{2x}}} = \sqrt{2^y} = \sqrt{2^4} = 4.$$

2. 두 좌표축에 접하고 반지름이 r 인 원의 방정식은

$$(x \pm r)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$$

중의 하나이고, 이 원이 점 (a, b) 를 지나므로

$$(a \pm r)^2 + (b \pm r)^2 = r^2, \qquad \text{즉} \qquad r^2 \pm 2(a \pm b)r + a^2 + b^2 = 0$$

이 성립한다. 따라서 근과 계수와의 관계로부터 이 방정식의 두 근의 곱을 구하면 a^2+b^2.

3. 가정에서 정수 $k = a^2 + 1$ 가 홀수라 하였으므로 a^2 은 짝수이고, 따라서 a $(a > 3)$ 도 짝수이다. 그러므로

$$c = k - (a-1)^2 = 2a, \qquad d = k - 1^2 = a^2$$

이라 놓으면, c, d 는 서로 다른 정수로서 $c \,\big|\, d$ 이며 $c, d \in S_k$ 이다.

4. $f(n)$ 의 정의를 이용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n-1} f(l) &= f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \\
&= 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \\
&= 1(n-1) + \frac{1}{2}(n-2) + \frac{1}{3}(n-3) + \cdots + \frac{1}{n-1}\big(n - (n-1)\big) \\
&= (n-1) + n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - (n-2) \\
&= (n-1) + n\left(f(n) - 1 - \frac{1}{n}\right) - (n-2) \\
&= nf(n) - n \\
&= n\{f(n) - 1\}.
\end{aligned}$$

그러므로 $g(n) = n$ 이다.

5. m 이 양의 정수일 때, 함수 f 의 정의에 의하여

$$f(k)=m \iff 2^m \le k < 2^{m+1}$$

이고, 우변의 구간에는 2^m 개의 정수가 있다. 즉, $2^m \le k < 2^{m+1}$ 인 2^m 개의 k 에 대하여 $f(k)=m$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{1000} f(k) &= \sum_{k=2}^{511} f(k) + \sum_{k=512}^{1000} f(k)\\ &= \sum_{m=1}^{8} m\cdot 2^m + 9\cdot(1000-512+1) \qquad (\because 2^9=512)\\ &= \sum_{m=1}^{8} m\cdot 2^m + 4401.\end{aligned}$$

한편, $S=\sum_{m=1}^{8} m\cdot 2^m$ 이라 놓으면,

$$S-2S = 2+2^2+2^3+\cdots+2^8-8\cdot 2^9$$

이고 이로부터 $S=3586$ 을 얻을 수 있다. 그러므로 구하고자 하는 답은

$$3586+4401=7987.$$

6. 실수 $h\neq 0$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} &\le \frac{2}{|h|}(x+h-x)^2\sin^2(x+h-x)\\ &= \frac{2}{|h|}h^2\sin^2 h\\ &= 2|h|\sin^2 h\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = 0$$

이다. 따라서 도함수의 정의에 의하여 $f'(x)=0$ 이고, f 는 상수함수이다.

7. 주어진 관계식을 정리하면

$$3a+4(b+c)+12d=120 \quad \text{즉,} \quad 3a=4(30-b-c-3d)$$

이다. 그런데, 3 과 4 는 서로 소이므로 a 는 4 의 배수이어야 한다. 따라서

$$a=4k \ \ (k\ge 1)$$

라 놓을 수 있고, 이 때 $3k = 30 - b - c - 3d$ 즉, $b + c = 30 - 3k - 3d = 3(10 - k - d)$ 가 되어 $b + c$ 는 3 의 배수임을 알 수 있다. 그러므로

$$b + c = 3l \ \ (l \geq 1)$$

로 놓을 수 있으며, 이것을 다시 위 식에 대입하면 $3l = 30 - 3k - 3d$ 즉,

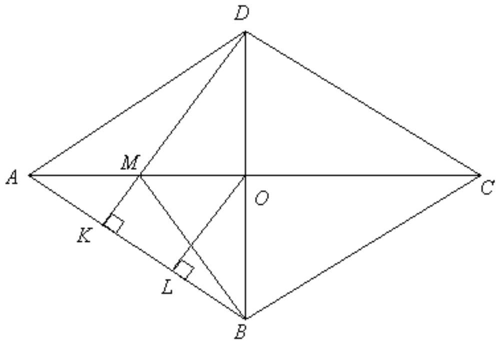
$$d = 10 - k - l$$

이 된다. 그러므로

$$a + b + c + d = 4k + 3l + (10 - k - l) = 10 + 3k + 2l$$

이고, $k \geq 1,\ \ l \geq 1$ 이므로 $k = 1,\ \ l = 1$ 일 때 $a + b + c + d$ 는 최소값 15 를 갖는다.

8. 그림과 같이 마름모 $ABCD$ 의 두 대각선의 교점을 O 라 하고, $\overline{OL} \perp \overline{AB}$ 가 되도록 선분 $\overline{OL}$ 을 잡자. 이 때, $\overline{DK}//\overline{OL}$ 이고 $\overline{DO} = \overline{OB}$ 이므로 $\overline{KL} = \overline{LB}$ 이다. 그런데 문제의 조건에서 $\overline{AK} : \overline{KB} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{AK} = \overline{KL}$ 이다. 이제, K 가 $\overline{AL}$ 의 중점이고 $\overline{MK}//\overline{OL}$ 이므로 삼각형 ALO 에 중점연결정리를 적용 하면,



$$\overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{OL}$$

이다. 또, 같은 방법으로 삼각형 BKD 에서

$$\overline{OL} = \frac{1}{2}\overline{DK}$$

를 얻을 수 있다. 따라서

$$\overline{MK} = \frac{1}{4}\overline{DK} = 1$$

이다. 그러므로

$$\overline{MB} = \overline{DM} = \overline{DK} - \overline{MK} = 4 - 1 = 3.$$

즉, 구하고자 하는 답은 3 이다.