충남대학교 주최

제 3 회 전국 고등학교 수학경시대회 모범답안

[제 1 차 시험 (공통) 문제 1 번]

3차 다항식 $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_3 \neq 0)$의 계수 a_0, a_1, a_2, a_3는 공차가 0이 아닌 등차수열을 이룬다. 이 때, 방정식 $P(x) = 0$의 근을 γ_1, γ_2, γ_3라 할 때,

$$R = \frac{1}{\gamma_1+\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_2+\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_3+\gamma_1}$$

의 최대값을 구하여라.

[풀 이] 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\gamma_1+\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_2+\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_3+\gamma_1} \\
&= \frac{(\gamma_2+\gamma_3)(\gamma_3+\gamma_1) + (\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_3+\gamma_1) + (\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_2+\gamma_3)}{(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_2+\gamma_3)(\gamma_1+\gamma_3)} \\
&= \frac{(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)^2 + (\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_1\gamma_3)}{(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3) - \gamma_1\gamma_2\gamma_3} \qquad (1)
\end{aligned}$$

다항식 $P(x)$의 근과 계수와의 관계

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad \gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1 = \frac{a_1}{a_3}, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

와 또 $P(x)$의 계수가 등차수열을 이룬다는 조건

$$a_2 = a_3 + d, \quad a_1 = a_3 + 2d, \quad a_0 = a_3 + 3d$$

을 이용하여 통분한 (1)식의 분자와 분모에 각각 대입하면

$$\begin{aligned}
\text{분자} &= \left(-\frac{a_2}{a_3}\right)^2 + \frac{a_1}{a_3} = \frac{2a_3^2 + 4a_3d + d^2}{a_3^2} \\
\text{분모} &= \left(-\frac{a_2}{a_3}\right)\left(\frac{a_1}{a_3}\right) + \frac{a_0}{a_3} = \frac{-2d^2}{a_3^2}.
\end{aligned}$$

따라서

$$R = \frac{2a_3^2 + 4a_3d + d^2}{-2d^2} = -\left(\frac{a_3}{d}\right)^2 - 2\frac{a_3}{d} - \frac{1}{2} = -\left(\frac{a_3}{d} + 1\right)^2 + \frac{1}{2}$$

그러므로 R은 $\dfrac{a_3}{d} = -1$ 즉 $d = -a_3$일 때 최대값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

[별 해] 세 근의 합 $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ 을 s라 두고 근과 계수의 관계

$$s = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad \gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1 = \frac{a_1}{a_3}, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

을 이용하면

$$R = \frac{1}{s-\gamma_3} + \frac{1}{s-\gamma_1} + \frac{1}{s-\gamma_2}$$

$$= \frac{3s^2 - 2s(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) + (\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1)}{(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)(s-\gamma_3)}$$

$$= \frac{s^2 + \dfrac{a_1}{a_3}}{(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)(s-\gamma_3)} \tag{2}$$

$P(x) = a_3(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_3)$ 이므로

$$\begin{aligned}(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)(s-\gamma_3) &= \frac{P(s)}{a_3} \\ &= \frac{1}{a_3}\left[a_3\left(-\frac{a_2}{a_3}\right)^3 + a_2\left(-\frac{a_2}{a_3}\right)^2 + a_1\left(-\frac{a_2}{a_3}\right) + a_0\right] \\ &= \frac{-a_1a_2 + a_3a_0}{a_3^2}.\end{aligned}$$

따라서 (2)식에 대입하면

$$R = \frac{a_2^2 + a_1a_3}{-a_1a_2 + a_3a_0}. \tag{3}$$

$a_i = a + (3-i)d$ ($d \neq 0,\ i = 0,1,2,3$)라 두고 (3)식에 대입하면

$$R = \frac{2a^2+4ad+d^2}{-2d^2} = -\left(\frac{a}{d}\right)^2 - 2\frac{a}{d} - \frac{1}{2} = -\left(\frac{a}{d}+1\right)^2 + \frac{1}{2}$$

따라서 R은 $\dfrac{a}{d} = -1$, 즉 $d = -a_3$ 일 때 최대값 $\dfrac{1}{2}$ 을 갖는다.

[제 1 차 시험 (제 1 분야) 문제 2 번]

모든 정수 n에 대하여

$$\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{34n}{105}$$

이 정수임을 보여라.

[풀 이] $n = 0$ 이면 당연하고 양의 정수 n에 대하여 성립하면

$$\frac{(-n)^7}{7} + \frac{(-n)^5}{5} + \frac{(-n)^3}{3} + \frac{34(-n)}{105} = -\left(\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{34n}{105}\right)$$

이므로 음의 정수에서도 성립한다. 따라서 양의 정수 n에 대해 성립함을 증명하면 충분하다.

양의 정수 n에 대해 $g(n) = \dfrac{n^7}{7} + \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{34n}{105}$이 정수임을 귀납법으로 증명하자.

(i) $g(0) = 0$는 정수이다.

(ii) $g(k)$가 정수임을 가정하면

$$\begin{aligned}g(k+1) &= \frac{(k+1)^7}{7} + \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{34(k+1)}{105} \\ &= g(k) + \frac{7(k^6+3k^5+5k^4+5k^3+3k^2+k)}{7} + \frac{5(k^4+3k^3+2k^2+k)}{5} \\ &\quad + \frac{3(k^2+k)}{3} + 1\end{aligned}$$

따라서 $g(k+1)$은 정수이다.

그러므로 0과 모든 자연수 n에 대하여 $g(n)$은 정수이고 $g(-n)=-g(n)$이므로 모든 정수n에 대하여 $g(n)$은 정수이다.

[별 해] 통분하여

$$\frac{15n^7+21n^5+35n^3+34n}{105}=\frac{f(n)}{105}$$

이라 놓고 $f(n)$이 105의 배수임을 보이면 된다.

한편 $105=3\cdot 5\cdot 7$이므로 $f(n)$이 3, 5, 7의 배수임을 각각 보이면 된다.

$$\begin{aligned} f(n) &= 3(5n^7+7n^5+11n^3+11n)+2n^3+n \\ &= 5(3n^7+4n^5+7n^3+7n)+n^5-n \\ &= 7(2n^7+3n^5+5n^3+5n)+n^7-n \end{aligned}$$

으로 각각 쓸 수 있으므로 다음만 보이면 된다.

1. $2n^3+n$은 항상 3의 배수이다
2. n^5-n은 항상 5 의 배수이다
3. n^7-n은 항상 7의 배수이다.

(1) 모든 정수 n은 $3k,\ 3k+1,\ 3k+2$로 분류 할 수 있고

$$\begin{aligned} n=3k &\quad\Rightarrow\quad 2n^3+n=2(3k)^3+3k=3(\cdots) \\ n=3k+1 &\quad\Rightarrow\quad 2n^3+n=2(3k+1)^3+3k+1=3(\cdots)+2+1 \\ n=3k+2 &\quad\Rightarrow\quad 2n^3+n=2(3k+2)^3+3k+2=3(\cdots)+16+2 \end{aligned}$$

따라서 $2n^3+n$은 모든 n에 대하여 3의 배수이다.

(2) 모든 정수 n은 $5k,\ 5k\pm1,\ 5k\pm2$로 분류 할 수 있고

$$\begin{aligned} n=5k &\quad\Rightarrow\quad n^5-n=(5k)^5-(5k)=5(\cdots) \\ n=5k+1 &\quad\Rightarrow\quad n^5-n=(5k+1)^5-(5k+1)=5(\cdots)+1-1 \\ n=5k+2 &\quad\Rightarrow\quad n^5-n=(5k+2)^5-(5k+2)=5(\cdots)+32-2 \\ n=5k-2 &\quad\Rightarrow\quad n^5-n=(5k-2)^5-(5k-2)=5(\cdots)-32+2 \\ n=5k-1 &\quad\Rightarrow\quad n^5-n=(5k-1)^5-(5k-1)=5(\cdots)-1+1 \end{aligned}$$

따라서 n^5-n은 모든 n에 대하여 5의 배수이다.

(3) 모든 정수 n은 $7k,\ 7k\pm1,\ 7k\pm2,\ 7k\pm3$로 분류 할 수 있고

$$\begin{aligned} n=7k &\quad\Rightarrow\quad n^7-n=(7k)^7-(7k)=7(\cdots) \\ n=7k+1 &\quad\Rightarrow\quad n^7-n=(7k+1)^7-(7k+1)=7(\cdots)+1-1 \\ n=7k+2 &\quad\Rightarrow\quad n^7-n=(7k+2)^7-(7k+2)=7(\cdots)+128-2 \\ n=7k+3 &\quad\Rightarrow\quad n^7-n=(7k+3)^7-(7k+3)=7(\cdots)+2187-3 \end{aligned}$$

$$n = 7k-1 \quad \Rightarrow \quad n^7 - n = (7k-1)^7 - (7k-1) = 7(\cdots) - 1 + 1$$
$$n = 7k-2 \quad \Rightarrow \quad n^7 - n = (7k-2)^7 - (7k-2) = 7(\cdots) - 128 + 2$$
$$n = 7k-3 \quad \Rightarrow \quad n^7 - n = (7k-3)^7 - (7k-3) = 7(\cdots) - 2187 + 3$$

따라서 $n^7 - n$은 모든 n에 대하여 7의 배수이다.

[제 1 차 시험 (제 2 분야) 문제 2 번]

집합 $F = \{\theta,\ e,\ \omega\}$가 두 연산 $*$와 $\circ$에 대하여 닫혀있고 결합법칙이 성립한다. θ와 e는 각각 연산 $*$와 $\circ$에 대한 항등원이고, 각 연산에 대하여 e와 ω의 역원이 각각 F에 존재한다. 임의의 원소 $a,\ b,\ c \in F$에 대하여 $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$가 성립할 때, $\omega \circ \omega = \omega * \omega$임을 보여라.

[풀 이] (1) $a \circ \theta = \theta,\ a \in F.$

$(\because)$ $a \circ b = a \circ (b * \theta) = (a \circ b) * (a \circ \theta).$ 이므로 $a \circ b$의 $*$에 대한 역원을 곱하면

$$a \circ \theta = * \text{ 의 항등원 } = \theta.$$

(2) $\omega \circ \omega = e$

$(\because)$ $\circ$에 대한 ω의 역원을 $\omega_\circ^{-1}$이라고 하자.

(i) $\omega \circ \omega = \omega$이면 $\omega = \omega \circ (\omega \circ \omega_\circ^{-1}) = (\omega \circ \omega) \circ \omega_\circ^{-1} = \omega \circ \omega_\circ^{-1} = e$: 모순.

(ii) $\omega \circ \omega = \theta$ 이면 (1)에 의하여 $\omega = \omega_\circ^{-1} \circ \omega \circ \omega = \omega_\circ^{-1} \circ \theta = \theta$: 모순.

(3) $\omega * \omega = e$

$(\because)$ $*$에 대한 ω의 역원을 ω_*^{-1}라 하자.

(i) $\omega * \omega = \omega$ 이면 $\omega = \omega * (\omega * \omega_*^{-1}) = (\omega * \omega) * \omega_*^{-1} = \omega * \omega_*^{-1} = \theta$: 모순.

(ii) $\omega * \omega = \theta$ 이면 $\omega * e = e$이 성립한다.

$(\because)$ (a) $\omega * e = \theta$이면 $\omega = \omega * \theta = \omega * \omega * e = \theta * e = e$: 모순.

(b) $\omega * e = \omega$이면 $\theta = \omega * \omega = \omega * \omega * e = \theta * e = e$: 모순.

따라서 $\omega * e = e = \theta * e$이다. 여기서 $\omega = \theta$. 그러나 이것은 모순이다.

그러므로 (2), (3)에 의하여 $\omega * \omega = \omega \circ \omega$.

[별 해] ω 의 연산 $\circ$ 에 대한 역원을 $\omega_\circ^{-1}$ 라 하자. $\omega \circ \omega = \omega * \omega$ 일 필요충분조건은

$$\omega_\circ^{-1} \circ (\omega \circ \omega) = \omega_\circ^{-1} \circ (\omega * \omega)$$

한편

$$(\omega_\circ^{-1} \circ \omega) \circ \omega = e \circ \omega = \omega$$
$$\omega_\circ^{-1} \circ (\omega * \omega) = (\omega_\circ^{-1} \circ \omega) * (\omega_\circ^{-1} \circ \omega) = e * e$$

따라서 $e * e = \omega$임을 보이면 충분하다.

(i) $e * e = e$ 이면 $e * e = e = \theta * e$ ($\because$ θ는 $*$ 의 항등원). $\therefore e = \theta$: 모순.

(ii) $e*e=\theta$ 이면 $e*\theta=e$ 이므로 ($\because \theta$는 항등원) $e*\omega=\omega$.

($\because$) $F=\{e*e,\ e*\theta,\ e*\omega\}=\{\theta,\ e,\ \omega\}$
그런데 $\theta*\omega=\omega$ 이므로 $e*\omega=\theta*\omega$. 따라서 $e=\theta$: 모순.

(i), (ii)에 의하여 $e*e=\omega$.

[제 1 차 시험 (제 1 분야) 문제 3 번]

상자 안에 1이 적힌 공이 한 개, 2가 적힌 공이 두 개, $\cdots$, N이 적힌 공이 N개 들어있다. 이 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후, 앞면이 나올 확률이 p인 동전 하나를 공에 적힌 숫자의 횟수 만큼 던진다. 확률변수 X를 동전의 앞면이 나오는 횟수라 할 때, X의 기대값을 구하여라.

[풀 이] 적힌 수가 k 인 공이 뽑히는 사건을 A_k 라 하면

$$P(A_k)=\frac{2k}{N(N+1)}$$

이고,

$$P(X=r\mid A_k)={}_kC_r p^r(1-p)^{k-r},\quad r=0,1,\cdots,k$$

이므로,

$$P(X=r) = \sum_{k=r}^{N} P(X=r\mid A_k)P(A_k) = \sum_{k=r}^{N}\frac{2k}{N(N+1)}{}_kC_r p^r(1-p)^{k-r}.$$

확률변수 X의 기대값은

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{r=0}^{N} r\ P(X=r) \\ &= \sum_{r=0}^{N} r\sum_{k=r}^{N}\frac{2k}{N(N+1)}{}_kC_r p^r(1-p)^{k-r} \\ &= \frac{2}{N(N+1)}\sum_{k=0}^{N} k\sum_{r=0}^{k} r\ {}_kC_r p^r(1-p)^{k-r} \\ &= \frac{2}{N(N+1)}\sum_{k=0}^{N} k\cdot kp \\ &= \frac{2p}{N(N+1)}\sum_{k=0}^{N} k^2 \\ &= \frac{(2N+1)p}{3}. \end{aligned}$$

[제 1 차 시험 (제 2 분야) 문제 3 번]

A와 B가 같은 경기를 되풀이하여 먼저 두 번 이기면 우승한다. 한 번의 경기에서 A가 이길 확률이 p, B가 이길 확률이 q, 비길 확률이 r이다. 단, $0<p,\ q,\ r<1$. $n+1$번째 경기 이전에 A가 우승할 확률을

P_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} P_n$을 구하여라.
(참조 : $0<\alpha<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} n^k\alpha^n = 0$)

[풀 이] k 번에서 A가 이기면서 시합이 끝나는 확률을 구하면,

(1) $k=2$일 때 p^2

(2) $k\geq 3$일 때

(i) $(k-1)$번 중 A가 1번 이기고 나머지는 비기면서 k번째 A가 이거나

(ii) $(k-1)$번 중 A가 1번 이기고 B가 1번 이기고, 나머지는 비기면서 k번째 A가 이긴다.

따라서,

$$\begin{aligned}
P_n &= p^2+\sum_{k=3}^{n}(k-1)pr^{k-2}p+\sum_{k=3}^{n}(k-1)(k-2)pqr^{k-3}p \\
&= p^2+\sum_{k=3}^{n}(k-1)r^{k-2}p^2+\sum_{k=3}^{n}(k-1)(k-2)r^{k-3}p^2q \\
&= p^2+(\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-2}p^2-p^2)+\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2)r^{k-3}p^2q \\
&= p^2\frac{d}{dr}\Big(\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}\Big)+p^2q\frac{d^2}{dr^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}\Big) \\
&= p^2\frac{d}{dr}\Big(\frac{1-r^n}{1-r}\Big)+p^2q\frac{d^2}{dr^2}\Big(\frac{1-r^n}{1-r}\Big) \\
&= p^2\Big(\frac{-nr^{n-1}}{1-r}+\frac{1-r^n}{(1-r)^2}\Big)+p^2q\Big(\frac{-n(n-1)r^{n-2}}{1-r}+\frac{-2nr^{n-1}}{(1-r)^2}+\frac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \lim_{n\to\infty}P_n &= \frac{p^2}{(1-r)^2}+p^2q\frac{2}{(1-r)^3} \\
&= \frac{p^2}{(1-r)^3}(1-r+2q) \\
&= \frac{p^2}{(1-r)^3}(p+3q)\quad (\text{혹은}) \\
&= \frac{p^2}{(p+q)^3}(p+3q).
\end{aligned}$$

[별 해] k번에서 A가 이기면서 끝나는 확률을 A_k라 하면

(1) 첫번째 A가 이기면서, k번째 A가 이긴다.

(a) $k-2$ 번 비긴다.

(b) B가 1번 이기고 $k-3$번 비긴다.

$$\therefore p^2r^{k-2}+(k-2)p^2qr^{k-3}$$

(2) 첫번째 비긴다. 그러면 $k-1$번 게임에서 A가 이기면서 끝나는 것이므로

$$rA_{k-1}$$

(3) 첫번째에 B가 이긴다. 그러면 $k-2$번 중 A가 1번 이기고 $k-3$번 비기고 k번째에서 A가 이긴다.

$$(k-2)p^2qr^{k-3}$$

따라서

$$A_k = p^2r^{k-2} + 2(k-2)p^2qr^{k-3} + rA_{k-1} \quad (k \geq 3), \quad A_2 = p^2$$

$$A_k - rA_{k-1} = p^2r^{k-2} + 2(k-2)p^2qr^{k-3}$$

$$rA_{k-1} - r^2A_{k-2} = p^2r^{k-2} + 2(k-3)p^2qr^{k-3}$$

$$\vdots$$

$$r^{k-3}A_3 - r^{k-2}A_2 = p^2r^{k-2} + 2 \cdot 1 \cdot p^2qr^{k-3}$$

$$A_k - r^{k-2}A_2 = (k-2)p^2r^{k-2} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-2} jp^2 \cdot qr^{k-3}$$

$$A_k = (k-1)p^2r^{k-2} + (k-1)(k-2)p^2qr^{k-3}$$

$$\therefore P_n = \sum_{k=2}^{n} A_k = p^2\left(\frac{-nr^{n-1}}{1-r} + \frac{1-r^n}{(1-r)^2}\right) + p^2q\left(\frac{-n(n-1)r^{n-2}}{1-r} - \frac{2nr^{n-1}}{(1-r)^2} + \frac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{p^2}{(1-r)^3}(p+3q).$$

[제 1 차 시험 (공통) 문제 4 번]

좌표평면 위의 한 점 $P(0,\ \theta)$를 고정하자. 점 A와 B는 $\angle APB = \theta$를 만족시키는 x축 위의 임의의 두 점이고 점 M은 x축 위의 점으로서 선분 $\overline{PM}$은 $\angle APB$를 이등분한다. 세 점 $A,\ B,\ P$를 지나는 원의 중심을 C라 하자. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$)

(1) 두 점 C와 M을 지나는 직선은 항상 y축 위의 한 고정점을 지남을 보여라.

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$일 때, 그 고정점의 좌표를 구하여라.

[풀 이] (1) 점 C에서 x축 상에 내린 수선의 발을 E, 반직선 $\overrightarrow{CE}$가 원 ABP 와 만나는 점을 F라 하자. 원점을 O, 반직선 $\overrightarrow{CM}$이 y축과 만나는 점을 D라 하자. 그러면 직선 $\overleftrightarrow{CE}$가 선분 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선이므로

$$\triangle ACE \equiv \triangle BCE.$$

따라서

$$\angle ACF = \angle BCF = \angle APB = \theta$$

그리고 $\angle APF = \angle BPF$이므로 직선 $\overrightarrow{PM}$은 점 F를 지난다.
$\triangle CEM \approx \triangle DOM,\ \triangle FEM \approx \triangle POM$이므로

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{DO}}{\theta}$$

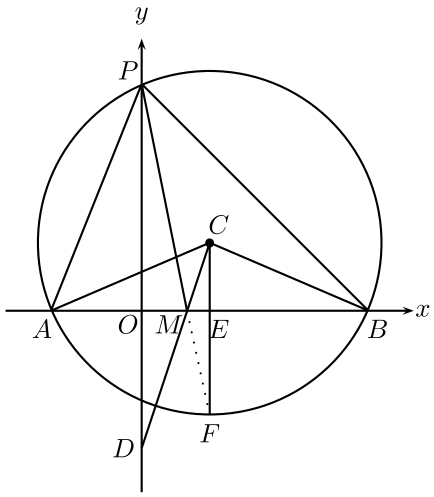
$\triangle BCE$에서 $\angle BCE = \angle APB = \theta$이므로

$$CE = CB\cos\theta,\ EF = CF - CE = CB(1-\cos\theta)$$

따라서

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EF}} = \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

그러므로 선분 $\overline{DO}$의 길이는 일정하다. 따라서 직선 $\overleftrightarrow{CM}$은 y축상의 한 고정점을 지난다.



(2) $\cos\theta = \frac{1}{3}$이면 $\frac{\overline{CE}}{\overline{EF}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{DO}}{\theta}$. 따라서 $\overline{DO} = \frac{\theta}{2}$. 그러므로 $D = (0, -\frac{\theta}{2})$

[제 2 차 시험 (공통) 문제 1 번]

모든 정수 k에 대하여 방정식

$$x^{1999} - x^{1997} + x^2 - 5kx + 5k - 2 = 0$$

은 정수해를 갖지 않음을 보여라.

[풀 이] 주어진 식을 변형하면

$$(x-1)\{(x+1)(x^{1997}+1) - 5k\} = 1$$

x가 위 식의 정수해라면

$$x - 1 = (x+1)(x^{1997}+1) - 5k = 1$$

이거나

$$x - 1 = (x+1)(x^{1997}+1) - 5k = -1$$

(i) $x - 1 = 1$이면 $x = 2$. 한편 $2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32$
따라서 2^n의 일자리의 수는 차례로 2, 4, 8, 6이 반복되므로 2^{1997}의 일자리의 수는 2이다.
그러므로 $(x+1)(x^{1997}+1) - 5k$의 일자리의 수는 4 또는 9이다.

따라서 $(x-1)\{(x+1)(x^{1997}+1)-5k\}=1$을 만족하는 정수 k는 존재하지 않는다.
(ii) $x-1=-1$이면 $x=0$, 따라서

$$1-5k=(x+1)(x^{1997}+1)-5k=-1$$

그러나 k가 정수이므로 이 식은 모순이다. 따라서 주어진 방정식은 정수해를 가지지 않는다.

[별 해] 방정식 $P(x)=x^{1999}-x^{1997}+x^2-5kx+5k-2=0$이 정수근 α를 갖는다면

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x),$$

여기서 $Q(x)$의 계수는 모두 정수이다. $Q(x)$의 상수항을 β 라 하면 $\beta\alpha=5k-2$이므로 α 는 $5k-2$ 의 약수이고 따라서 α는 5의 배수가 아니다.
(i) $\alpha=5l\pm1$이면

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (5l\pm1)^{1999}-(5l\pm1)^{1997}+(5l\pm1)^2-5k(5l\pm1)+5k-2 \\ &\equiv \pm1-(\pm1)+1-2\equiv 4 \ (\text{mod}5) \ \therefore \text{모순;} \end{aligned}$$

(ii) $\alpha=5l\pm2$이면

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (5l\pm2)^{1999}-(5l\pm2)^{1997}+(5l\pm2)^2-5k(5l\pm2)+5k-2 \\ &\equiv (\pm2)^{1999}-(\pm2)^{1997}+4-2=\pm3\cdot2^{1997}+2 \ (\text{mod } 5) \\ &= \pm3\cdot(2^4)^{499}\cdot2+2\equiv\pm3\cdot1^{499}\cdot2+2\equiv 3 \text{ 또는} 1 \ (\text{mod } 5) \ \therefore \text{모순.} \end{aligned}$$

따라서 방정식 $P(x)=0$은 정수근을 갖지 않는다.

[제 2 차 시험 (제 1 분야) 문제 2 번]

함수 f가 주어져서 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-\{f(x)\}^2}$$

을 만족시키는 0이 아닌 실수 a가 존재하면, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+b)=f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 b가 존재함을 보여라.

[풀 이] 함수 f의 정의에서

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-f(x+a)^2}.$$

$\frac{1}{2}$를 이항하여 제곱하면

$$\begin{aligned} \{f(x+2a)-\frac{1}{2}\}^2 &= f(x+a)-f(x+a)^2 \\ &= \frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}-\Big(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}\Big)^2 \end{aligned}$$

위의 식을 정리하면

$$f(x+2a)^2 - f(x+2a) = -f(x) + f(x)^2.$$

인수분해하면

$$\{f(x+2a) - f(x)\}\{f(x+2a) + f(x) - 1\} = 0.$$

따라서

$$f(x+2a) = f(x) \ \text{ 또는 } \ f(x+2a) + f(x) - 1 = 0.$$

여기서 $f(x+2a) + f(x) - 1 = 0$이 성립하면, $f(x) \geq \frac{1}{2}$, $f(x+2a) \geq \frac{1}{2}$에 의하여

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} = f(x).$$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2a) = f(x)$이 성립한다.

[제 2 차 시험 (제 2 분야) 문제 2 번]

어떤 볼록 k다각형 A_0의 각 변의 길이를 a_1, a_2, $\cdots$, a_k라 하자. 이 k다각형 A_0의 각 변을 제외한 나머지 변의 길이의 평균을 각 변으로 하는 새로운 볼록 k다각형을 A_1이라 하자.

예를 들어 삼각형의 경우, A_0의 세 변의 길이를 a, b, c라 하면 , A_1은 세 변의 길이가 $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}$인 삼각형이다.

같은 방법으로 만들어진 볼록 k 다각형 A_i로부터 각 변을 제외한 나머지 변의 길이의 평균을 각 변으로 하는 새로운 볼록 k 다각형 A_{i+1}을 만들 때, n 번째 만들어진 볼록 k 다각형 A_n의 변의 길이를 각각 $b_1(n)$, $b_2(n)$, $\cdots$, $b_k(n)$이라 할 때, 각 j $(1 \leq j \leq k)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} b_j(n)$을 구하여라.

[풀 이] $s = \sum_{i=1}^{k} a_i$ 라 하자. $b_j(1) = \frac{s - a_j}{k-1}$ 이고, A_1 의 둘레는

$$\sum_{j=1}^{k} b_j(1) = \sum_{j=1}^{k} \frac{s - a_j}{k-1} = s$$

따라서 $b_j(2) = \frac{s - b_j(1)}{k-1}$ 이 되고, A_2 의 둘레의 길이도 s 가 된다.
여기서, 수학적귀납법을 이용하여 A_n의 둘레의 길이도 s임을 보이자.
$b_1(n) + b_2(n) + \cdots + b_k(n) = s$라 가정하면

$b_j(n+1) = \frac{b_1(n) + \cdots + b_{j-1}(n) + b_{j+1}(n) + \cdots + b_k(n)}{k-1} = \frac{s - b_j(n)}{k-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} b_1(n+1) + b_2(n+1) + \cdots + b_k(n+1) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{s - b_j(n)}{k-1} \\ &= \frac{ks - \sum_{j=1}^{k} b_j(n)}{k-1} = \frac{ks - s}{k-1} = s \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} b_j(n) &= \frac{s}{k-1} - \frac{b_j(n-1)}{k-1} \\ &= \frac{s}{k-1} - \frac{1}{k-1}\Big[\frac{s-b_j(n-2)}{k-1}\Big] \\ &= \Big(\frac{s}{k-1} - \frac{s}{(k-1)^2}\Big) + \frac{b_j(n-2)}{k-1} \\ &\vdots \\ &= s\sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l-1}}{(k-1)^l} + \frac{(-1)^{n-1}}{(k-1)^n}a_j \end{aligned}$$

$k \geq 3$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_j(n) = s\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{(k-1)^l} = s\Bigg(\frac{\frac{1}{k-1}}{1+\frac{1}{k-1}}\Bigg) = \frac{s}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k} = \frac{s}{k}.$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} b_j(n) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$.

[별 해] 풀이의 다음식

$$b_j(n) = \frac{s}{k-1} - \frac{b_j(n-1)}{k-1}$$

에서 임의의 정수 n $(n \geq 0)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} b_j(n+1) - \frac{s}{k} &= -\frac{1}{k-1}\Big(b_j(n) - \frac{s}{k}\Big) \\ \therefore\ \ b_j(n) - \frac{s}{k} &= \Big(b_j(0) - \frac{s}{k}\Big)\Big(-\frac{1}{k-1}\Big)^n \\ \therefore\ \ b_j(n) &= \Big(b_j(0) - \frac{s}{k}\Big)\Big(-\frac{1}{k-1}\Big)^n + \frac{s}{k} \end{aligned}$$

$\Big|-\frac{1}{k-1}\Big| \leq \frac{1}{2}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} b_j(n) = \frac{s}{k}$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} b_j(n) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$.

[제 2 차 시험 (공통) 문제 3 번]

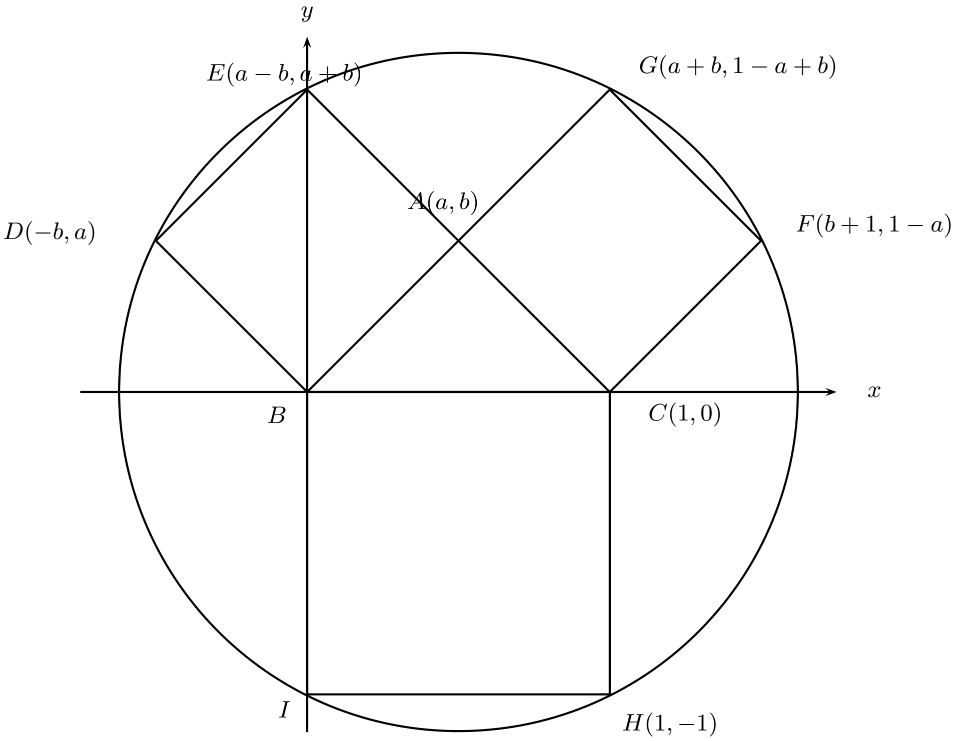
삼각형 ABC의 외부에 삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 개의 정사각형 $ABDE$, $ACFG$, $BCHI$를 만들 때 여섯 개의 꼭지점 D, E, F, G, H, I를 지나는 원이 존재하기 위한 필요충분조건을 구하여라.

[풀 이] $B = (0,0),\ C = (1,0),\ A = (a,b)$로 놓고 $b > 0$으로 가정하면

$D = (-b,a),\ E = (a-b, a+b),\ F = (b+1, 1-a),\ G = (a+b, 1-a+b),\ H = (1,-1),\ I = (0,-1)$

원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + Lx + My + N = 0$$



이므로 이 식이 D, E, F, G, H, I를 지날 조건을 구하면 된다.

$$I = (0,-1) \text{ 대입} \quad \Rightarrow \quad 1 - M + N = 0 \Rightarrow N = M - 1 \tag{1}$$

$$H = (1,-1) \text{ 대입} \quad \Rightarrow \quad 2 + L - M + N = 0 \Rightarrow L = -1 \tag{2}$$

(1), (2)에 의해 원의 방정식은 $x^2 + y^2 - x - 1 + (y+1)M = 0$.

$$D = (-b,a) \text{ 대입} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + b - 1 + M(a+1) = 0 \tag{3}$$

$$E = (a-b,a+b) \text{ 대입} \quad \Rightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 - a + b - 1 + (a+b+1)M = 0 \tag{4}$$

$$F = (b+1,1-a) \text{ 대입} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + b - 2a + (2-a)M = 0 \tag{5}$$

$$G = (a+b,1-a+b) \text{ 대입} \quad \Rightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 - 3a + b + (2-a+b)M = 0 \tag{6}$$

$(3) - (5)$에서 $2a + 2Ma - M - 1 = (M+1)(2a-1) = 0$이므로

$$M = -1 \qquad \text{혹은} \qquad a = \frac{1}{2} \tag{7}$$

(i) $M = -1$이면 (3), (4)식에서 $b = 1, a = 1$. 따라서 $\triangle ABC$는 직각이등변삼각형이다.

(ii) $a = \dfrac{1}{2}$이면 (3), (4)식에서

$$b^2 + b + \frac{3}{2}M - \frac{3}{4} = 0, \qquad 2b^2 + b + Mb + \frac{3}{2}M - 1 = 0.$$

M항을 소거하여 정리하면

$$8b^3 - 4b^2 - 6b + 3 = (8b-4)(b^2 - \frac{3}{4}) = 0.$$

$b > 0$ 이므로 $a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이면 정삼각형, $a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$ 이면 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\triangle ABC$는 정삼각형 또는 직각이등변삼각형이다.

역으로 $\triangle ABC$가 정삼각형 또는 직각이등변삼각형이면 D, E, F, G, H, I를 지나는 원이 존재함은 분명하다.