충남대학교 주최

# 제 2 회 전국 고등학교 수학경시대회 모범답안

## [제 1 차 시험 (공통) 문제 1 번]

$f_0(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ 이고, $n \geqq 1$ 일 때 $f_n(x) = (f_{n-1}(x))^2 - 2$ 이면 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{f_n(x)}{f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)} < f_1(x) \quad (n \geqq 2,\ x \geqq 0).$$

---

**[풀 이]** 수학적 귀납법으로 $f_n(x) \geqq 2$ $(x \geqq 0,\ n \geqq 0)$임을 보이자.

(i) $n = 0$ 인 경우 성립한다.

(ii) $n = k$ 인 경우 성립한다고 가정하면

$$f_{k+1}(x) = (f_k(x))^2 - 2 > 4 - 2 > 0.$$

여기서 $f_n(x) > 0,\ (f_{n-1}(x))^2 = f_n(x) + 2$ $(n \geqq 1,\ x \geqq 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}(f_1(x)\cdots f_{n-1}(x))^2 &= (f_2(x)+2)\cdots(f_n(x)+2)\\ &= f_2(x)\cdots f_n(x) + \cdots\\ &> f_2(x)\cdots f_n(x).\end{aligned}$$

따라서

$$f_1(x) > \frac{f_n(x)}{f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)}.$$

**[부등식 증명의 다른방법]**

수학적 귀납법으로 부등식이 성립함을 보이자.

(i) $n = 2$ 인 경우.

$(f_1(x))^2 = f_2(x) + 2 > f_2(x)$.이므로 $n = 2$ 인 경우 부등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 인 경우 부등식이 성립한다고 가정하자.

$f_n(x) > 0$ $(x \geqq 0,\ n \geqq 0)$이고 $f_k(x) < (f_1(x))^2 f_2(x)\cdots f_{k-1}(x)$ 이므로

$$(f_k(x))^2 < (f_1(x))^2 f_2(x)\cdots f_{k-1}(x) f_k(x).$$

따라서

$$f_{k+1}(x) < f_{k+1}(x) + 2 = (f_k(x))^2 < (f_1(x))^2 f_2(x)\cdots f_{k-1}(x) f_k(x).$$

그러므로

$$\frac{f_{k+1}(x)}{f_1(x)\cdots f_k(x)} < f_1(x).$$

수학적 귀납법으로 다음식이 성립함을 보이자.

$$f_n(x) = (x+1)^{2^n} + \frac{1}{(x+1)^{2^n}}, \quad n = 0, 1, \cdots .$$

(i) $n = 0$ 인 경우 성립한다.

(ii) $n = k$ 인 경우 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= (f_k(x))^2 - 2 = \left((x+1)^{2^k} + \frac{1}{(x+1)^{2^k}}\right)^2 - 2 \\ &= (x+1)^{2^{k+1}} + \frac{1}{(x+1)^{2^{k+1}}}. \end{aligned}$$

따라서 $f_n(x) = (x+1)^{2^n} + \dfrac{1}{(x+1)^{2^n}}, \quad n = 0, 1, \cdots .$

수학적 귀납법으로 부등식이 성립함을 보이자.

(i) $n = 2$ 인 경우.

$$(f_1(x))^2 = \left((x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2}\right)^2 = (x+1)^4 + 2 + \frac{1}{(x+1)^4} > f_2(x).$$

따라서 $n = 2$ 인 경우 부등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 인 경우 부등식이 성립한다고 가정하자.

$$\begin{aligned} f_1(x) \quad &\cdots \quad f_{n-1}(x)) \\ &= \left((x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2}\right) \cdots \left((x+1)^{2^{n-1}} + \frac{1}{(x+1)^{2^{n-1}}}\right) \\ &= (x+1)^{2+2^2+\cdots+2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{(x+1)^{2+2^2+\cdots+2^{n-1}}} \\ &> (x+1)^{2^n-2} + \frac{1}{(x+1)^{2^n-2}} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} f_1(x)f_1(x)\cdots f_{n-1}(x) &> \left((x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2}\right)\left((x+1)^{2^n-2} + \frac{1}{(x+1)^{2^n-2}}\right) \\ &= (x+1)^{2^n} + \cdots + \frac{1}{(x+1)^{2^n}} \\ &> (x+1)^{2^n} + \frac{1}{(x+1)^{2^n}} \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

**[부등식 증명의 다른방법]**

(i) $x = 0$ 인 경우.

$f_n(0) = 2$ $(n \geqq 1)$ 이므로 $n \geqq 2$ 이면

$$\frac{f_n(0)}{f_1(0)\cdots f_{n-1}(0)} = \frac{2}{2^{n-1}} < 2.$$

따라서 부등식이 성립한다.

(ii) $x > 0$ 인 경우.

$$\begin{aligned} f_1(x)\cdots f_{n-1}(x) &= \left((x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2}\right) \cdots \left((x+1)^{2^{n-1}} + \frac{1}{(x+1)^{2^{n-1}}}\right) \\ &= \frac{(x+1)^{2^n} - \dfrac{1}{(x+1)^{2^n}}}{(x+1)^2 - \dfrac{1}{(x+1)^2}}. \end{aligned}$$

따라서

$$\frac{f_n(x)}{f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)}\cdot\frac{1}{f_1(x)}=\frac{(x+1)^{2^n}+\dfrac{1}{(x+1)^{2^n}}}{(x+1)^{2^n}-\dfrac{1}{(x+1)^{2^n}}}\cdot\frac{(x+1)^2-\dfrac{1}{(x+1)^2}}{(x+1)^2+\dfrac{1}{(x+1)^2}}.$$

여기서 $g(t)=\dfrac{t+\dfrac{1}{t}}{t-\dfrac{1}{t}}$ 라 두면 $g(t)=1+\dfrac{2}{t^2-1}$ 이므로 $1<t_1<t_2$ 이면 $g(t_1)>g(t_2)$ 이다.

그러므로 $x>0$, $n\geqq 2$ 이면

$$\frac{f_n(x)}{f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)}\cdot\frac{1}{f_1(x)}=\frac{g((x+1)^{2^n})}{g((x+1)^2)}<1.$$

## [제 1 차 시험 (공통) 문제 2 번]

어떤 정수 $m,n$ 에 대하여 $m+ni=(1+i)^3(e+fi)$ 인 정수 $e,f$ 는 존재하고 $m+ni=(1+i)^4(g+hi)$ 인 정수 $g,h$ 는 존재하지 않을 때,

$$m+ni=(a+bi)^2+(c+di)^2$$

을 만족하는 정수 $a,b,c,d$ 가 존재하지 않음을 증명하여라. (단, $i^2=-1$)

---

**[풀 이]** $m+ni=a^2-b^2+c^2-d^2+2(ab+cd)i$ 을 만족하는 정수 $a,b,c,d$ 가 존재한다면,

$$m=a^2-b^2+c^2-d^2,\quad n=2(ab+cd).$$

가정에서 $m+ni=-2(e+f)+2(e-f)i$ 이므로

$$m+n=-4f.$$

$m+ni=(1+i)^4(g+hi)=-4(g+hi)$ 인 정수 $g,h$ 는 존재하지 않으므로

$$m+ni\neq-4(g+hi).$$

즉, $m$, $n$ 모두는 4의 배수가 아니다.

(i) $a,b,c,d$ 가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우.

$m,n$ 모두 4의 배수가 되어 $m+ni\neq-4(g+hi)$ 에 모순이다.

(ii) $a,b,c,d$ 중 하나만 짝수이거나 하나만 홀수인 경우.

$m=a^2-b^2+c^2-d^2$ 은 홀수가 되어 $m+ni=-2(e+f)+2(e-f)i$ 에 모순이다.

(iii) $a,b,c,d$ 중 2개만 짝수인 경우.

$ab$ 와 $cd$ 중 하나만 짝수이면 $a$, $b$ 만 짝수 또는 $c$, $d$ 만 짝수이다. 그러므로 $m=a^2-b^2+c^2-d^2$ 은 4의 배수이고 $n=-4f-m$ 도 4의 배수이다. 따라서 $m+ni\neq-4(g+hi)$ 에 모순이다.

$ab$ 와 $cd$가 모두 짝수이면 $n=2(ab+cd)$ 은 4의 배수이고 $m=-4f-n$ 도 4의 배수이다. 따라서 $m+ni\neq-4(g+hi)$ 에 모순이다.

그러므로 $m+ni=a^2-b^2+c^2-d^2+2(ab+cd)i$ 을 만족하는 정수 $a,b,c,d$ 는 존재하지 않는다.

**[별 해]** $m+ni=(1+i)^3(e+fi)=-2(e+f)+2(e-f)i$ 이므로

$$m=-2(e+f), \quad n=2(e-f).$$

따라서 $m, n$ 은 모두 짝수이다.

한편 $m+ni=(1+i)^4(g+hi)=-4(g+hi)$ 인 정수 $g, h$ 는 존재하지 않으므로 $m$ 과 $n$ 중 하나는 4의 배수가 아니다. $m$ 이 4의 배수이면 $e+f$ 는 짝수이다. 따라서 $e-f=e+f-2f$ 가 짝수가 되고 $n$ 도 4의 배수가 된다. 마찬가지 방법으로 $n$ 이 4의 배수이면 $m$ 도 4의 배수가 된다. 그러므로 $m$ 과 $n$ 은 모두 4의 배수가 아니다.

$m+ni=(a+bi)^2+(c+di)^2$ 을 만족하는 정수 $a, b, c, d$ 가 존재한다고 가정하자. 양변을 전개하여 실수부와 허수부를 비교하면

$$m=a^2-b^2+c^2-d^2, \quad n=2(ab+cd).$$

$n$ 이 4의 배수가 아니므로 $ab+cd$ 은 홀수이다. 따라서 $ab$ 와 $cd$ 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이다.

$ab$ 가 짝수이고 $cd$ 가 홀수라고 가정하자. $ab$가 짝수이므로, $a, b$ 모두 짝수인 경우와 $a, b$ 중 하나는 짝수이고 나머지 하나는 홀수인 경우가 있다.

$a$ 와 $b$ 가 모두 짝수이면, $a=2a'$, $b=2b'$ ($a'$, $b'$ 은 정수)이므로

$$a^2-b^2=4({a'}^2-{b'}^2).$$

따라서 $a^2-b^2$ 은 4로 나누어 떨어진다.

$a$ 와 $b$ 중 하나는 짝수이고 다른 하나가 홀수인 경우 $a=2a'$, $b=2b'+1$ ($a'$, $b'$ 은 정수)라 가정하면

$$a^2-b^2=4({a'}^2-{b'}^2-b')-1.$$

따라서 $a^2-b^2$ 은 4로 나눌때 나머지가 3이다.

$cd$ 가 홀수이므로 $c$ 와 $d$ 는 모두 홀수가 되어 $c^2-d^2=(c+d)(c-d)$ 는 4로 나누어 떨어진다.

따라서 $a^2-b^2+c^2-d^2$ 은 4로 나눌때 나머지가 0 또는 3이다. 그러나 $m$은 4로 나눌때 나머지가 2 이므로 $m=a^2-b^2+c^2-d^2$ 에 모순이다.

$ab$ 가 홀수이고 $cd$ 가 짝수인 경우도 위와 마찬가지 방법으로 모순이 생김을 알 수 있다. 따라서 이러한 정수 $a, b, c, d$ 는 존재하지 않는다.

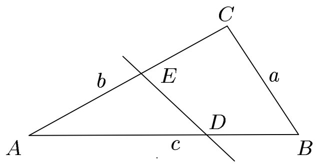
---------- [제 1 차 시험 (공통) 문제 3 번] ----------

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하자. $a<b<c$, $2a<c$이면 $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분하는 직선이 오직 하나 존재함을 증명하여라.

---

**[풀 이]** $a<b<c$이므로 꼭지점을 지나는 직선은 $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분할 수 없다. 따라서 꼭지점을 지나지 않는 직선에 대하여 살펴보자.

(i) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$와 점 $D, E$에서 만나는 직선이 $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분한다고 하자. $\overline{AD}=x$, $\overline{AE}=y$라 놓으면 $cb\sin A = 2xy\sin A$이므로




$$\begin{aligned}&0<x<c,\quad 0<y<b,\\ &xy=\frac{bc}{2},\quad x+y=\frac{a+b+c}{2}.\end{aligned}$$

따라서 $x, y$는 이차방정식

$$g(t)=t^2-\frac{a+b+c}{2}t+\frac{bc}{2}=0$$

의 두 근이다. 이때 이차방정식 $g(t)=0$의 판별식은 $f(b)$이다. 단,

$$f(t)=\left(\frac{a+t+c}{2}\right)^2-4\cdot\frac{tc}{2}=\frac{1}{4}(t^2-2(3c-a)t+(a+c)^2).$$

$0<a+c<3c-a,\quad 2a<c$이므로

$$\begin{aligned}f(3c-a) &= \frac{1}{4}((a+c)^2-(3c-a)^2)<0\\ f(c-a) &= c(2a-c)<0\end{aligned}$$

$c-a<b<3c-a$이므로

$$f(b)<0.$$

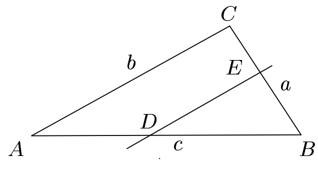
따라서 이차방정식 $g(t)=0$은 실근을 가지지 않는다. 그러므로 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$와 점 $D, E$에서 만나는 직선은 $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분할 수 없다.

(ii) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$와 점 $D, E$에서 만나는 직선이 $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분한다고 하자. $\overline{BD}=x$, $\overline{BE}=y$라 놓으면 $ca\sin B=2xy\sin B$이므로

$$0<x<c,\quad 0<y<a,\quad xy=\frac{ac}{2},\quad x+y=\frac{a+b+c}{2}.$$

따라서 $x, y$는 다음의 이차방정식의 두 근이다.

$$g(t)=t^2-\frac{a+b+c}{2}t+\frac{ac}{2}=0$$




이 때

$$\begin{aligned}g(0) &= \frac{ac}{2}>0,\quad g(a)=\frac{a(a-b)}{2}<0,\\ g(b) &= \frac{(b-a)(b-c)}{2}<0,\quad g(c)=\frac{c(c-b)}{2}>0.\end{aligned}$$

따라서 이차방정식 $g(t)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지며 $0<y<a<b<x<c$인 $x$와 $y$의 값을 각각 하나씩 구할 수 있다.

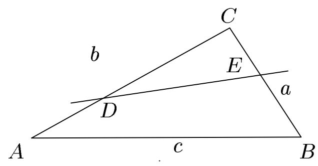
(iii) 변 $AC$, $BC$와 점 $D$, $E$에서 만나는 직선이 $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분한다고 하자. $\overline{CD}=x$, $\overline{CE}=y$라 놓으면 $ab\sin C = 2xy\sin C$ 이므로

$$0<x<b,\quad 0<y<a,\quad xy=\frac{ab}{2},\quad x+y=\frac{a+b+c}{2}.$$

따라서 $x, y$ 는 이차방정식

$$g(t)=t^2-\frac{a+b+c}{2}t+\frac{ab}{2}=0$$

의 두 근이다. 이 때




$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{ab}{2}>0,\quad g(a)=\frac{a(a-c)}{2}<0,\\ g(b) &= \frac{b(b-c)}{2}<0,\quad g(c)=\frac{(c-a)(c-b)}{2}>0. \end{aligned}$$

따라서 이차방정식 $g(t)=0$은 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta$ $(0<\alpha<a<b<\beta)$를 갖는다. 그러나 이 실근은 구하는 $x, y$의 조건을 만족하지 않는다. 그러므로 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$와 점 $D, E$에서 만나는 직선은 $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분할 수 없다.

위의 (i)(ii)(iii)의 경우를 종합하면 $\triangle ABC$의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분하는 직선은 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$를 지나는 직선으로 유일하게 존재한다.

## [제 1 차 시험 (제1분야) 문제 4 번]

철수와 영희가 1 에서 6 까지의 눈이 나타날 확률이 같은 주사위를 하나씩 가지고 던진다. 철수는 1 또는 2 의 눈이 나타날 때까지 던지고, 영희는 4, 5, 6 의 눈 중 하나가 나타날 때까지 던진다. 주사위 던진 회수를 비교하여,

(1) 철수가 던진 회수가 1 회이거나

(2) 두 사람이 던진 회수가 모두 2 회 이상이고, 철수가 던진 회수가 영희가 던진 회수보다 3 회 이상 많지 않을 때

철수가 이기는 것으로 한다. 철수가 이길 확률을 구하여라.

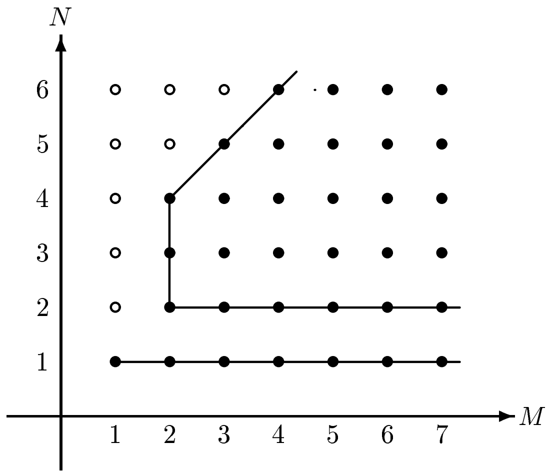
---

[**풀 이**] 철수가 던진 회수를 $N$, 영희가 던진 회수를 $M$이라 하면,

$$P(N=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right),\quad n=1,2,\cdots .$$

$$P(M=m)=\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right),\quad m=1,2,\cdots .$$

아래의 그림에서 철수가 이기는 경우를 $\bullet$으로 표시하였다.




이 확률변수 $N$ 과 $M$ 을 이용하면 철수가 이길 확률 $Q$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
Q &= P(N=1) + P(N \geqq 2,\, M \geqq 2,\, N-M \leqq 2) \\
&= P(N=1) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{m+2} P(N=n,\, M=m) \\
&= P(N=1) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{m+2} P(N=n) P(M=m) \\
&= \frac{1}{3} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{m+2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \left(\frac{1}{3}\right) \sum_{n=2}^{m+2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{m} - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{m}\right] \\
&= \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{16}{27}.
\end{aligned}
$$

---

[**별 해**] 철수가 던진 회수가 1 이고, 철수가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$.
철수가 던진 회수가 2 이고, 철수가 이길 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right).$$

철수가 던진 회수가 3 이고, 철수가 이길 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right) \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right).$$

철수가 던진 회수가 4 이고, 철수가 이길 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right).$$

철수가 던진 회수가 5 이고, 철수가 이길 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{m=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m=\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

철수가 던진 회수가 6 이고, 철수가 이길 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{m=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m=\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

계속하여, 철수가 던진 회수가 $k$ 이고, 철수가 이길 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{m=k-2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}.$$

따라서, 위의 확률을 모두 더하면

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}\\
=&\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+4\sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\\
=&\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\\
=&\ \frac{16}{27}.
\end{aligned}$$

**[제 1 차 시험 (제2분야) 문제 4 번]**

앞면이 나올 확률이 $p$ $(0<p<1)$ 인 동전을 $n$ 회 던질 때, 앞면이 나온 회수가 4의 배수가 될 확률을 $a_n$ 이라 하자. $\lim_{n\to\infty} a_n$ 은 $p$ 의 값에 관계없이 일정함을 증명하여라.

---

[**풀 이**] 동전을 $n$ 번 던졌을 때 $H_j(n)$ 을 앞 면이 $4k+j$, $k=0,1,2,\ldots$, $j=0,1,2,3$ 번 나타날 확률이라 하자. 그러면

$$\sum_{j=0}^{3}H_j(n)=1 \tag{1}$$

이고

$$\begin{aligned}
H_0(n) &= (1-p)H_0(n-1)+pH_3(n-1)\\
H_1(n) &= (1-p)H_1(n-1)+pH_0(n-1)\\
H_2(n) &= (1-p)H_2(n-1)+pH_1(n-1)\\
H_3(n) &= (1-p)H_3(n-1)+pH_2(n-1)
\end{aligned} \tag{2}$$

이 성립한다. 이제 $j = 0, 1, 2, 3$ 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} H_j(n) = H_j$$

라 하면, $\lim_{n\to\infty} H_j(n-1) = H_j$ 이므로, (2) 로 부터

$$\begin{aligned} H_0 &= (1-p)H_0 + pH_3 \\ H_1 &= (1-p)H_1 + pH_0 \\ H_2 &= (1-p)H_2 + pH_1 \\ H_3 &= (1-p)H_3 + pH_2 \end{aligned}$$

이 성립한다. 즉, 모든 $p$, $0 < p < 1$, 에 대하여 $H_0 = H_1 = H_2 = H_3$ 이다. (1) 로 부터

$$H_j = \frac{1}{4}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

가 된다.

---

[**별 해**] 앞면이 나온 회수가 4의 배수가 될 확률 $a_n$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_n = \sum_{k=0}^{[n/4]} \binom{n}{4k} p^{4k}(1-p)^{n-4k}.$$

이항정리를 이용하면

$$\begin{aligned} (p+q)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \\ (-p+q)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

따라서,

$$\frac{(p+q)^n + (-p+q)^n}{2} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} p^{2k}(1-p)^{n-2k}.$$

같은 방법으로, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{(ip+q)^n + (-ip+q)^n}{2} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} p^{2k}(1-p)^{n-2k}.$$

따라서,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{[n/4]} \binom{n}{4k} p^{4k}(1-p)^{n-4k} \\ &= \frac{1}{4}\left\{(p+q)^n + (-p+q)^n + (ip+q)^n + (-ip+q)^n\right\}. \end{aligned}$$

이제 $p + q = 1$ 이고 $0 < p < 1$ 이므로,

$$|-p+q| < 1, \quad |ip+q|^2 < 1, \quad |-ip+q|^2 < 1.$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$$

이 되고 $p$에 관계없이 일정하다.

## [제 2 차 시험 (공통) 문제 1 번]

어떤 실수 $a, b$에 대하여 함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x,y) = (ax+by,\ bx+ay).$$

함수 $f$ 를 $n$ 번 합성한 함수를 $f^n$ 으로 표시할 때 (즉, $f^n = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n\text{ 개}}$ ),
함수 $f^{2^{1998}}$ 이 항등함수가 되도록하는 순서쌍 $(a,b)$ 를 모두 구하여라.

---

**[풀 이]** 함수 $f$는 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ 의 일차변환이다. 따라서 합성함수 $f^{2^k}$는 행렬 $A^{2^k}$의 일차변환이다.

$a = a_0,\ b = b_0$라 하고, $k \geqq 1$에서 다음이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하자.

$$A^{2^k} = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix},$$

$$a_k = {a_{k-1}}^2 + {b_{k-1}}^2,$$

$$b_k = 2a_{k-1}b_{k-1}.$$

(i) $k = 1$ 인 경우 다음식에 의하여 성립한다.

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{bmatrix}.$$

(ii) $k = n$ 인 경우 위식이 성립함을 가정하면

$$A^{2^{(n+1)}} = A^{2^n} A^{2^n} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {a_n}^2 + {b_n}^2 & 2a_nb_n \\ 2a_nb_n & {a_n}^2 + {b_n}^2 \end{bmatrix}.$$

따라서, 모든 $k \geqq 1$에 대하여 위의 식이 성립한다.

함수 $f^{2^{1998}}$이 항등함수가 된다고 가정하면 $A^{2^{1998}} = I$ 즉, $a_{1998} = 1,\ b_{1998} = 0$. 위의 식에서

$$\begin{aligned} b_{1998} &= 2a_{1997}b_{1997} \\ &= 2^2 a_{1997}a_{1996}b_{1996} \\ &\cdots \\ &= 2^{1998} a_{1997}a_{1996}\cdots a_0 b_0 \end{aligned}$$

따라서 적당한 $0 \leqq k \leqq 1997$에 대하여 $a_k = 0$ 또는 $b_0 = 0$이다.

(i) $a_0 = 0$인 경우.

$b_k = 2a_{k-1}b_{k-1}$ $(k \geqq 1)$이므로

$$b_k = 0, k \geqq 1.$$

따라서,

$$a_{1998} = {a_{1997}}^2 = {a_{1996}}^{2^2} = \cdots = {a_1}^{2^{1997}} = {b_0}^{2^{1998}}.$$

그러므로 ${b_0}^2 = 1$, 즉 $b = \pm 1$.

(ii)적당한 $0 < k \leqq 1997$에 대하여 $a_k = 0$인 경우.

$a_k = {a_{k-1}}^2 + {b_{k-1}}^2$이므로 $a_{k-1} = 0$. 반복하여 계산하면 $a_0 = 0$. 따라서 위의 경우에 의하여 $b = \pm 1$.

(iii) $b_0 = 0$인 경우.

$b_k = 2a_{k-1}b_{k-1}$ $(k \geqq 1)$이므로

$$b_k = 0, k \geqq 1.$$

따라서,

$$a_{1998} = {a_{1997}}^2 = {a_{1996}}^{2^2} = \cdots = {a_1}^{2^{1997}} = {a_0}^{2^{1998}}.$$

그러므로 ${a_0}^2 = 1$, 즉 $a = \pm 1$.

위의 경우들을 종합하면 구하는 순서쌍 $(a, b)$는 $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$이다.

---

**[별 해]** 먼저 $f^{2^k}(x, y) = (a_k x + b_k y, b_k x + a_k y)$형태임을 수학적 귀납법으로 보이자.

(i) $f(x, y) = (ax + by, bx + ay)$이므로 $k = 0$일 때 성립한다.

(ii) $f^{2^{k-1}}(x, y) = (a_{k-1}x + b_{k-1}y, b_{k-1}x + a_{k-1}y)$ 라 가정하면

$$\begin{aligned} f^{2^k}(x, y) =& f^{2^{k-1}} \circ f^{2^{k-1}}(x, y) = f^{2^{k-1}}(a_{k-1}x + b_{k-1}y,\ b_{k-1}x + a_{k-1}y) \\ =& ((a_{k-1}^2 + b_{k-1}^2)x + 2a_{k-1}b_{k-1}y,\ 2a_{k-1}b_{k-1}x + (a_{k-1}^2 + b_{k-1}^2)y). \end{aligned}$$

따라서, $f^{2^k}(x, y) = (a_k x + b_k y,\ b_k x + a_k y)$형태이다.

$I$를 항등함수라 할 때 $f^{2^k} + I$, $(k \geqq 1)$가 전단사함수임을 보이자.

$(f^{2^k} + I)(x, y) = (f^{2^k} + I)(x', y')$이라 하면

$$\begin{cases} (1 + {a_{k-1}}^2 + {b_{k-1}}^2)x + 2a_{k-1}b_{k-1}y = (1 + {a_{k-1}}^2 + {b_{k-1}}^2)x' + 2a_{k-1}b_{k-1}y' \\ 2a_{k-1}b_{k-1}x + (1 + {a_{k-1}}^2 + {b_{k-1}}^2)y = 2a_{k-1}b_{k-1}x' + (1 + {a_{k-1}}^2 + {b_{k-1}}^2)y' \end{cases}$$

위의 이원일차연립방정식을 풀면 $x = x', y = y'$. 따라서, $f^{2^k} + I$는 단사함수이다.

임의의 $(x', y') \in \mathbb{R}^2$에 대하여, $(f^{2^k} + I)(x, y) = (x', y')$인 $(x, y)$가 존재함을 보이자.

다음의 연립방정식

$$\begin{cases} (1 + {a_{k-1}}^2 + {b_{k-1}}^2)x + 2a_{k-1}b_{k-1}y = x' \\ 2a_{k-1}b_{k-1}x + (1 + {a_{k-1}}^2 + {b_{k-1}}^2)y = y' \end{cases}$$

을 만족하는 $(x, y)$가 존재하므로 $f^{2^k} + I$는 전사함수이다. 그러므로 $f^{2^k} + I$는 전단사함수이며, $(f^{2^k} + I)(0, 0) = (0, 0)$ 이다.

$f^{2^{1998}}$가 항등함수 즉, $f^{2^{1998}}(x, y) = (x, y) = I(x, y)$라 가정하면,

$$(f^{2^{1998}} - I)(x, y) = (0, 0).$$

$f^{2^{1998}} - I$ 의 인수분해에 의해

$$(f^{2^{1998}} - I)(x, y) = (f^{2^{1997}} + I)(f^{2^{1996}} + I) \cdots (f^2 + I)(f^2 - I)(x, y) = (0, 0).$$

$f^{2^k} + I$ $(k \geqq 1)$은 전단사함수이고 $(f^{2^k} + I)(0, 0) = (0, 0)$이므로

$$(f^2 - I)(x, y) = (0, 0).$$

따라서,

$$f^2(x,y) = ((a^2+b^2)x + 2aby,\ 2abx + (a^2+b^2)y) = (x,y).$$

즉,

$$a^2+b^2 = 1,\ 2ab = 0.$$

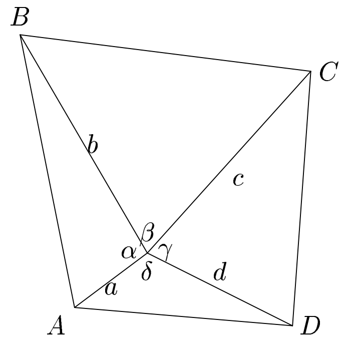
그러므로, 구하는 순서쌍은

$$(a,b) = (0,\pm 1),\ (\pm 1, 0).$$

**[제 2 차 시험 (제 1 분야) 문제 2 번]**

평면위의 점 $P(3,4)$에서의 거리가 각각 $1,2,3,4$인 네 점을 꼭지점으로 하는 사각형의 최대면적을 구하여라.

---




**[풀 이]** 네 점을 각각 $A,B,C,D$라 하고 점 $P$까지의 거리를 각각 $a,b,c,d$ 그리고 $\angle APB = \alpha$, $\angle BPC = \beta$, $\angle CPD = \gamma$, $\angle DPA = \delta$라 하면 $\square ABCD$ 의 넓이 $S$는 다음과 같다.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sin\gamma + \frac{1}{2}ad\sin\delta.$$

$0 < \sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma, \sin\delta \leqq 1$이므로 고정된 실수 $a$, $b$, $c$, $d$에 대하여 $\square ABCD$의 면적이 최대가 되는 경우는

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \sin\delta = 1.$$

즉, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \dfrac{\pi}{2}$.
그러므로 다음의 세가지 경우를 생각한다.

1) $a=1, b=2, c=3, d=4$인 경우
$$S = \frac{1}{2}(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 1) = 12.$$
2) $a=1, b=3, c=2, d=4$인 경우
$$S = \frac{1}{2}(1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 4\cdot 1) = 10.5.$$
3) $a=1, b=3, c=4, d=2$인 경우
$$S = \frac{1}{2}(1\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2 + 2\cdot 1) = 12.5.$$

그러므로 3)의 경우에 $\square ABCD$의 면적이 최대가 되고 이 때의 면적은 $S = 12.5$이다.

---

**[별 해]** 점 $P$를 원점으로 옮겨서 생각하자. 원점을 중심으로 반지름이 $1,2,3,4$인 원을 각각 $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$라 하고 $\square ABCD$의 한 점 $A$가 원 $S_4$위에 있다고 하자. 이 때 좌표축을 회전하여 $\square ABCD$의 대각선 $AC$가 $x$축에 평행임을 가정할 수 있다. 그리고 점 $B$는 대각선 $AC$의 위에 점 $D$는 대각선 $AC$의 아래쪽에 있다고 하자.

다음의 세가지 경우에서 $\square ABCD$의 면적의 최대값을 각각 구해보자.

(1)점 $C$가 원 $S_1$위에 있는 경우.

(2)점 $C$가 원 $S_2$위에 있는 경우.

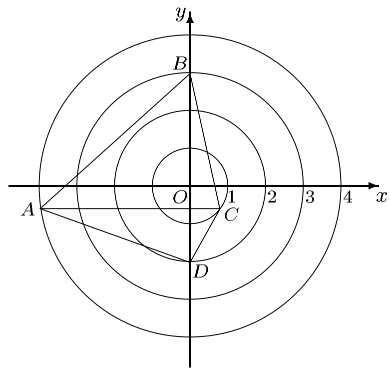
(3)점 $C$가 원 $S_3$위에 있는 경우.

(1) 점 $C$가 원 $S_1$위에 있는 경우.

$\square ABCD$의 면적이 가장 크게 되는 경우는 $\triangle ABC$와 $\triangle ADC$의 면적이 최대가 될 때이다. 이 때

[$B$와 원점을 지나는 직선] $\perp \overline{AC}$,

[$D$와 원점을 지나는 직선] $\perp \overline{AC}$.




그러므로 점 $B$와 점 $D$를 지나는 직선은 원점을 지나며 선분 $\overline{AC}$ 와 수직이다. 즉 $B = (0,3)$, $D = (0,-2)$ 또는 $B = (0,2)$, $D = (0,-3)$. 따라서 $\overline{BD}$의 길이는 5이다. 그러므로

$$\square ABCD\text{의 면적 } = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{AC}$$

한편 선분 $\overline{AC}$의 길이가 최대가 되는 경우는 $A = (-4,0)$, $C = (1,0)$, 이때 $\overline{AC} = 5$.

그러므로 점 $A$가 원 $S_4$위에 있고 점 $C$가 원 $S_1$위에 있는 경우 $\square ABCD$의 면적의 최대값은 12.5이다.

(2) 점 $C$가 원 $S_2$위에 있는 경우.

(1)의 경우와 마찬가지 방법으로 마찬가지 방법으로 $B = (0,1)$, $D = (0,-3)$ (또는 $B = (0,3)$, $D = (0,-1)$) $A = (-4,0)$, $C = (2,0)$일 때 $\square ABCD$의 면적이 최대가 되며 이 때 최대값은 12이다.

(3) 점 $C$가 원 $S_3$위에 있는 경우.

(1)의 경우와 마찬가지 방법으로 마찬가지 방법으로 $B = (0,1)$, $D = (0,-2)$ (또는 $B = (0,2)$, $D = (0,-1)$) $A = (-4,0)$, $C = (3,0)$일 때 $\square ABCD$의 면적이 최대가 되며 이 때 최대값은 10.5이다.

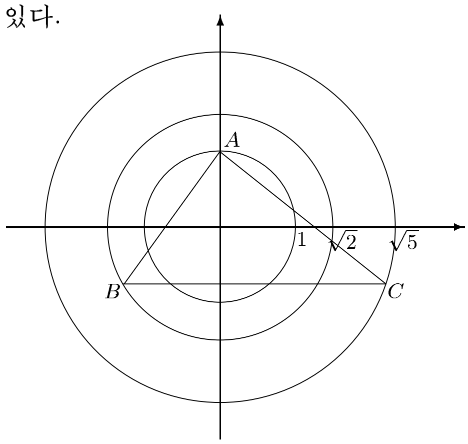
위의 (1),(2),(3)의 경우에서 $\square ABCD$의 면적이 최대가 되는 경우는 (1)의 경우이며 최대값은 12.5이다.

## [제 2 차 시험 (제 2 분야) 문제 2 번]

평면위의 점 $P(3,4)$에서의 거리가 각각 $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$인 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 최대면적을 구하시오.

---

**[풀 이]** 일반성을 잃지않고, 선분 $\overline{BC}$ 는 $x$축에 평행하게 놓을 수 있다. 이때 $\triangle ABC$의 면적이 최대가 되려면 점 $A$ 는 $(0,1)$이어야 한다. 점 $B$ 의 좌표를 $(x_1, y)$, 점 $C$의좌표를 $(x_2, y)$라 놓으면




$$x_1 = -\sqrt{2-y^2}, \quad x_2 = \sqrt{5-y^2}.$$

따라서 $\triangle ABC$의 면적 $S$는

$$S = \frac{1}{2}(1-y)(\sqrt{2-y^2} + \sqrt{5-y^2}).$$

양변을 미분하여 정리하면

$$2S' = -(\sqrt{2-y^2}+\sqrt{5-y^2})\left(1 - \frac{y(1-y)}{\sqrt{2-y^2}\sqrt{5-y^2}}\right).$$

그러므로 $S' = 0$이라 놓으면

$$y(1-y) = \sqrt{2-y^2}\sqrt{5-y^2}.$$

정리하면

$$2y^3 - 8y^2 + 10 = (y+1)(2y^2 - 10 + 10) = 0.$$

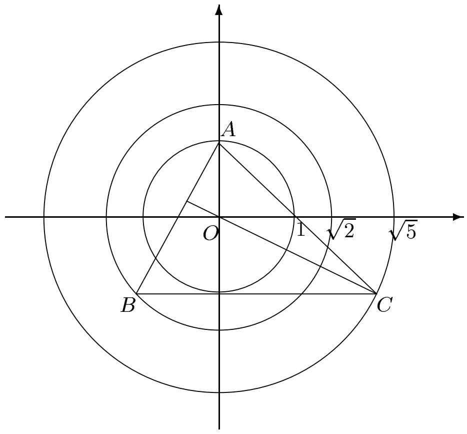
따라서 $y = -1$일때 최대면적 $S = 3$이다.

---

[**별 해**] 점 $P$를 원점으로 옮겨서 생각하자. 점 $A, B, C$는 원점을 중심으로 반지름이 각각 $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$인 원 위에서 움직이는 점으로서 $\triangle ABC$의 면적이 최대가 되는 경우라고 가정하자.

일반성을 잃지않고, 선분 $\overline{BC}$ 는 $x$축에 평행하게 놓을 수 있다. 이때 $\triangle ABC$의 면적이 최대이므로 점 $A$는 $(0,1)$이다.

점 $B$ 의 좌표를 $(x_1, y)$, 점 $C$의 좌표를 $(x_2, y)$라 놓으면




$$x_1 = -\sqrt{2-y^2}, \quad x_2 = \sqrt{5-y^2}.$$

이 때 직선 $AB$와 직선 $CO$는 서로 수직임을 알 수 있다. 따라서 $\triangle ABC$의 면적 $S$는

$$S = \frac{1}{2}(1-y)(\sqrt{2-y^2} + \sqrt{5-y^2}).$$

그리고, (직선 $AB$의 기울기) $\times$ (직선 $CO$의 기울기)$=-1$.
즉,

$$\frac{y-1}{\sqrt{2-y^2}}\frac{y}{\sqrt{5-y^2}} = -1.$$

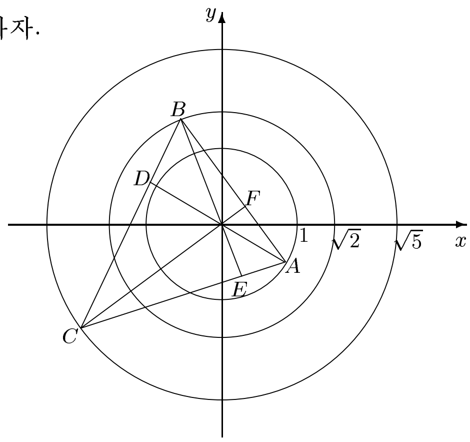
위 식을 정리하면

$$2y^3 - 8y^2 + 10 = (y+1)(2y^2 - 10 + 10) = 0.$$

따라서 $y = -1$. 그러므로 최대면적 $S = 3$이다.

---

[**별 해**] 점 $P$를 원점으로 옮겨서 생각하자. 점 $A, B, C$는 원점을 중심으로 반지름이 각각 $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$인 원 위에서 움직이는 점으로서 $\triangle ABC$의 면적이 최대가 되는 경우라고 가정하자.




점 $A$는 점 $B, C$가 주어졌을 때 $\triangle ABC$의 면적이 가장 크게되는 점이다. 따라서

[점 $A$와 원점을 지나는 직선] $\perp$ [선분 $\overline{BC}$].

마찬가지 방법으로

[점 $B$와 원점을 지나는 직선] $\perp$ [선분 $\overline{AC}$],

[점 $C$와 원점을 지나는 직선] $\perp$ [선분 $\overline{AB}$].

점 $A$와 원점을 지나는 직선과 $\overline{BC}$의 교점을 $D$, 점 $B$와 원점을 지나는 직선과 $\overline{AC}$의 교점을 $E$, 점 $C$와 원점을 지나는 직선과 $\overline{AB}$의 교점을 $F$라 하고 선분 $\overline{OD}$의 길이를 $x$라 하면 $\triangle BCF$와 $\triangle OCD$는 서로 닮음이므로

$$\angle ABD = \angle COD.$$

$\overline{CD} = \sqrt{5-x^2}$, $\overline{BD} = \sqrt{2-x^2}$이므로

$$\frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}} = \tan\angle ABD = \tan\angle COD = \frac{\sqrt{5-x^2}}{x}.$$

위의 식을 정리하면 $(x-1)(2x^2+10x+10)=0$. 따라서 $x=1$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ 이다.

한편 $0 < x \le \sqrt{2}$이므로 $x=1$. 따라서

$$\overline{BC} = 3,\ \overline{AD} = 2.$$

그러므로 $\triangle ABC$의 최대면적은

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3.$$

## [제 2 차 시험 (제 1 분야) 문제 3 번]

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ 라 하자. 임의의 자연수 $n$에 대하여 집합 $B$의 원소 $(x,y)$ 가 $\sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{1}{k}$ 을 만족하면

$$\frac{x^a y^b}{x^{2c}+y^{2d}} < \frac{1}{n}$$

이 성립하는 자연수 $k$가 존재할 필요충분조건을 자연수 $a,b,c,d$ 의 관계식으로 나타내어라.

---

**[풀 이]**

자연수 $n$에 대하여 문제의 조건을 만족하는 자연수 $k$가 존재한다고 가정하자.

$x^{2c}+y^{2d} \ge 2\sqrt{x^{2c}y^{2d}}$ 이고 등호는 $x^{2c}=y^{2d}$ 즉, $x^c=y^d$일 때 성립한다. $x^c=y^d$라 하면

$$\frac{x^a y^b}{x^{2c}+y^{2d}} = \frac{x^a x^{\frac{c}{d}b}}{2x^{2c}} = \frac{1}{2}x^{a+\frac{c}{d}b-2c}.$$

따라서 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{1}{k}$이면

$$\frac{1}{2}x^{a+\frac{c}{d}b-2c} < \frac{1}{n}.$$

$n>2$이면

$$x^{a+\frac{c}{d}b-2c} < \frac{2}{n} < 1.$$

$0 < x \leqq 1$이므로 $a+\frac{c}{d}b-2c>0$, 즉 $ad+bc>2cd$.

이제 $ad+bc>2cd$이 충분조건임을 보이자.

(i)$x^c \ge y^d$인 경우.

$N_1 = a+\frac{c}{d}b-2c > 0$ 라 두면,

$$\frac{x^a y^b}{x^{2c}+y^{2d}} \leqq \frac{x^a y^b}{x^{2c}} \leqq \frac{x^a x^{\frac{c}{d}b}}{x^{2c}} = x^{a+\frac{c}{d}b-2c} = x^{N_1}.$$

한편

$$\frac{x^a y^b}{x^{2c}+y^{2d}} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad x^{N_1} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad x < \frac{1}{n^{1/N_1}}$$

$k_1$을 $n^{1/N_1}$보다 큰 자연수 (예를 들면 $[\sqrt[N_1]{n}]+1$)로 택하면

$$0 \leqq x \leqq \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{k_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^a y^b}{x^{2c}+y^{2d}} \leqq x^{N_1} < \frac{1}{n}.$$

(ii) $y^d \geq x^c$인 경우.

$N_2 = \frac{d}{c}a + b - 2d > 0$ 라 두면,

$$\frac{x^a y^b}{x^{2c} + y^{2d}} \leqq \frac{x^a y^b}{y^{2d}} \leqq \frac{y^{\frac{d}{c}a} y^b}{y^{2d}} = y^{\frac{d}{c}a+b-2d} = y^{N_2}.$$

한편

$$\frac{x^a y^b}{x^{2c} + y^{2d}} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad y^{N_2} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad y < \frac{1}{n^{1/N_2}}$$

$k_2$을 $n^{1/N_2}$보다 큰 자연수 (예를 들면 $[n^{1/N_2}] + 1$)로 택하면

$$0 \leqq y \leqq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{k_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^a y^b}{x^{2c} + y^{2d}} \leqq y^{N_2} < \frac{1}{n}.$$

(i)(ii)에 의하여 $k = \max\{k_1, k_2\}$가 문제의 조건을 만족한다. 그러므로, 구하는 필요충분조건은 $ad + bc > 2cd$이다.

## [제 2 차 시험 (제 2 분야) 문제 3 번]

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$라 하자. 임의의 자연수 $n$에 대하여 집합 $B$의 원소 $(x, y, z)$가 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \dfrac{1}{k}$ 이면

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d} + y^{3e} + z^{3f}} < \frac{1}{n}$$

이 성립하는 자연수 $k$가 존재할 필요충분조건을 자연수 $a, b, c, d, e, f$의 관계식으로 나타내어라.

---

**[풀 이]**

자연수 $n$에 대하여 문제의 조건을 만족하는 자연수 $k$가 존재한다고 가정하자.

$x^{3d} + y^{3e} + z^{3f} \geq 3\sqrt[3]{x^{3d} y^{3e} z^{3f}}$ 이고 등호는 $x^{3d} = y^{3e} = z^{3f}$ 즉, $x^d = y^e = z^f$일 때 성립한다.

$x^d = y^e = z^f$라 하면

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d} + y^{3e} + z^{3f}} = \frac{x^a x^{\frac{d}{e}b} x^{\frac{d}{f}c}}{3x^{3d}} = \frac{1}{3} x^{a+\frac{d}{e}b+\frac{d}{f}c-3d}.$$

따라서 $0 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \dfrac{1}{k}$ 이면

$$\frac{1}{3} x^{a+\frac{d}{e}b+\frac{d}{f}c-3d} < \frac{1}{n}.$$

여기서 $n > 3$ 이면

$$x^{a+\frac{d}{e}b+\frac{d}{f}c-3d} < \frac{3}{n} < 1.$$

$0 < x \leqq 1$이므로 $a + \frac{d}{e}b + \frac{d}{f}c - 3d > 0$ 즉, $cde + aef + bdf > 3def$.

다음으로 $cde + aef + bdf > 3def$가 충분조건임을 보이자.

(i) $x^d \geqq y^e$ 이고 $x^d \geqq z^f$ 인 경우.

$N_1 = a + \frac{d}{e}b + \frac{d}{f}c - 3d > 0$ 라 두면,

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d} + y^{3e} + z^{3f}} \leqq \frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}} \leqq \frac{x^a x^{\frac{d}{e}b} x^{\frac{d}{f}c}}{x^{3d}} = x^{a+\frac{d}{e}b+\frac{d}{f}c-3d} = x^{N_1}.$$

한편

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}+y^{3e}+z^{3f}} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad x^{N_1} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad x < \frac{1}{n^{1/N_1}}.$$

$k_1$을 $n^{1/N_1}$보다 큰 자연수(예를 들면 $[n^{1/N_1}]+1$)로 택하면

$$0 \leqq x \leqq \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \frac{1}{k_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}+y^{3e}+z^{3f}} \leqq x^{N_1} < \frac{1}{n}$$

(ii) $y^e \geqq x^d$ 이고 $y^e \geqq z^f$ 인 경우.

$N_2 = \frac{e}{d}a + b + \frac{e}{f}c - 3e > 0$ 라 두면,

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}+y^{3e}+z^{3f}} \leqq \frac{x^a y^b z^c}{y^{3e}} \leqq \frac{y^{\frac{e}{d}a} y^b y^{\frac{e}{f}c}}{y^{3e}} = y^{\frac{e}{d}a+b+\frac{e}{f}c-3e} = y^{N_2}.$$

한편

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}+y^{3e}+z^{3f}} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad y^{N_2} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad y < \frac{1}{n^{1/N_2}}.$$

$k_2$을 $n^{1/N_2}$보다 큰 자연수(예를 들면 $[n^{1/N_2}]+1$)로 택하면

$$0 \leqq y \leqq \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \frac{1}{k_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}+y^{3e}+z^{3f}} \leqq y^{N_2} < \frac{1}{n}$$

(iii) $z^f \geq x^d$ 이고 $z^f \geq y^e$ 인 경우.

$N_3 = \frac{f}{d}a + \frac{f}{e}b + c - 3f > 0$ 라 두면,

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}+y^{3e}+z^{3f}} \leqq \frac{x^a y^b z^c}{z^{3f}} \leqq \frac{z^{\frac{f}{d}a} z^{\frac{f}{e}b} z^c}{z^{3f}} = z^{\frac{f}{d}a+\frac{f}{e}b+c-3f} = z^{N_3}.$$

한편

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}+y^{3e}+z^{3f}} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad z^{N_3} < \frac{1}{n} \quad \Longleftarrow \quad z < \frac{1}{n^{1/N_3}}.$$

$k_3$을 $n^{1/N_3}$보다 큰 자연수(예를 들면 $[n^{1/N_3}]+1$)로 택하면

$$0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \frac{1}{k_3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^a y^b z^c}{x^{3d}+y^{3e}+z^{3f}} \leqq z^{N_3} < \frac{1}{n}$$

(i),(ii),(iii)에 의하여 $k = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ 가 문제의 조건을 만족한다.

그러므로, 구하는 필요충분조건은 $cde + aef + bdf > 3def$ 이다.

끝