충남대학교 주최
제 1 회 전국 고등학교 수학경시대회 모범답안

제 1 분야 (1차시험) 문제1 번
제 2 분야 (1차시험) 문제1 번

[문 제]
방정식 $x^n = 1$ 의 허근을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$ 이라 할 때,
$(\alpha_1+2)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_{n-1}+2)$ 의 값을 구하여라. (단, n은 3 이상인 홀수).

[풀 이]
$f(x) = (x-2)^n - 1$ 이라 놓자.
$1+2, \alpha_1+2, \alpha_2+2, \cdots, \alpha_{n-1}+2$ 는 $f(x) = 0$ 의 해이다.
따라서,

$$(x-2)^n - 1 = (x-(1+2))(x-(\alpha_1+2))\cdots(x-(\alpha_{n-1}+2)).$$

위의 식에 $x = 0$ 을 대입하면,

$$\begin{aligned}(-2)^n - 1 &= (-(1+2))(-(\alpha_1+2))\cdots(-(\alpha_{n-1}+2)) \\ &= (-1)^n 3(\alpha_1+2)\cdots(\alpha_{n-1}+2).\end{aligned}$$

n 이 홀수이므로,

$$2^n + 1 = 3(\alpha_1+2)\cdots(\alpha_{n-1}+2).$$

따라서 구하는 수는

$$\frac{1+2^n}{3}.$$

[별 해]
$x^n - 1 = (x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})$ 이므로
$x = -2$ 를 대입하면,

$$\begin{aligned}(-2)^n - 1 &= (-2-1)(-2-\alpha_1)(-2-\alpha_2)\cdots(-2-\alpha_{n-1}) \\ &= (-1)^n(2+1)(\alpha_1+2)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_{n-1}+2).\end{aligned}$$

n 이 홀수이므로

$$2^n + 1 = 3(\alpha_1+2)\cdots(\alpha_{n-1}+2).$$

따라서 구하는 수는 $\dfrac{1+2^n}{3}$.

제 1 분야 (1차시험) 문제2 번
제 2 분야 (1차시험) 문제2 번

[문 제]
$a_1, \cdots, a_n$ 이 양수일 때 다음 부등식을 증명하여라. (단, $n \geqq 2$)

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1}+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{a_2}+\cdots+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_n} \geqq n(n-1).$$

[풀 이]
$S=\sum_{i=1}^n a_i$ 라 두면

$$\text{좌변}=\sum_{i=1}^n \frac{S-a_i}{a_i}=S\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}-n.$$

산술평균 $\geq$ 조화평균이므로

$$\frac{S}{n}=\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

따라서,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n^2.$$

그러므로, 좌변 $\geq n^2-n$.

[별 해 1]
n 에 대한 귀납법으로 증명한다.
(i) $n=2$ 일때,

$$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}-2=\frac{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2}{a_1a_2} \geq 0.$$

따라서, 성립한다.
(ii) $n-1$ 일 때 부등호가 성립한다고 가정하자 ($n \geq 3$).

$$\begin{aligned}\text{좌변}=&\frac{a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_1}+\cdots+\frac{a_1+\cdots+a_{n-2}}{a_{n-1}}\\&+(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_n})+(\frac{a_n}{a_2}+\frac{a_2}{a_n})+\cdots+(\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{a_n})\\ \geq&(n-1)(n-2)+2(n-1)\\ =&n(n-1).\end{aligned}$$

[별 해 2]

$$\begin{aligned}\text{좌변}&=\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_1}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\\ &\geqq (n-1)n\sqrt[n(n-1)]{\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_1}{a_n}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}}\\ &=(n-1)n\end{aligned}$$

제 1 분야 (1차시험) 문제3 번
제 2 분야 (1차시험) 문제3 번

[문 제]
x, y 가 $5n+2$ 이하의 자연수일 때, $3x^2+2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 순서쌍 (x, y)는 모두 몇가지인가? (단, n 은 자연수)
[풀 이]
x, y 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(x, y) = (a+5k_1, b+5k_2) \quad 0 \le a, b \le 5,\ 0 \le k_1, k_2 \le n.$$

이 때 $3a^2+2b^2$ 이 5 의 배수이면 $3x^2+2y^2$ 은 5 의 배수이다. 5 의 배수가 되는 순서쌍 (a, b) 를 구하면 다음

$$(a, b) = (1,1), (1,4), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,1), (4,4), (5,5)$$

의 9 가지이다. 이 때,

(1) x, y가 $5n$ 이하이면 $0 \le a, b \le 5, \quad 0 \le k_1, k_2 \le n-1$ 이므로
$3x^2+2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 경우는 $9n^2$ 가지이다.

(2) $x = 5n+1$ 일 때 $3x^2+2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 경우는

$$(x, y) = (5n+1, 1+5k), \quad 0 \le k \le n,$$
$$(x, y) = (5n+1, 4+5k), \quad 0 \le k \le n-1.$$

따라서, $2n+1$ 가지이다.

(3) $x = 5n+2$ 일 때 $3x^2+2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 경우는

$$(x, y) = (5n+2, 2+5k), \quad 0 \le k \le n,$$
$$(x, y) = (5n+2, 3+5k), \quad 0 \le k \le n-1.$$

따라서, $2n+1$ 가지이다.

(4) $y = 5n+1$ 일 때 $3x^2+2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 경우는

$$(x, y) = (5k+1, 1+5n), \quad 0 \le k \le n,$$
$$(x, y) = (5k+4, 1+5n), \quad 0 \le k \le n-1.$$

따라서, $2n+1$ 가지이다.

(5) $y = 5n+2$ 일 때 $3x^2+2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 경우는

$$(x, y) = (5k+2, 2+5n), \quad 0 \le k \le n,$$
$$(x, y) = (5k+3, 2+5n), \quad 0 \le k \le n-1.$$

따라서, $2n+1$ 가지이다.

위의 (2) - (5) 의 경우에서 중복되는 경우는 다음의 2 가지이다.

$$(x, y) = (5n+1, 5n+1), (5n+2, 5n+2).$$

따라서, 구하는 경우의 수는

$$9n^2 + 4(2n+1) - 2 = 9n^2 + 8n + 2.$$

[별 해]

x, y 를 다음과 같이 나타낸다.

$$x = 5k + m, \quad y = 5l + p \qquad p, m = 0, \pm1, \pm2, \quad 0 \le k, l \le n.$$

따라서,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 &= 3(5k+m)^2 + 2(5l+p)^2 \\ &= (3 \times 5^2 k^2 + 6 \times 5km + 2 \times 5^2 l^2 + 4 \times 5lp) + 3m^2 + 2p^2. \end{aligned}$$

그러므로, $3x^2 + 2y^2$ 이 5 의 배수가 되려면 $3m^2 + 2p^2$ 이 5 의 배수가 되어야 한다.

이 때 $3m^2 + 2p^2$ 이 5 의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $m = \pm1, \quad p = \pm1$

(ii) $m = \pm2, \quad p = \pm2$

(iii) $m = 0, \quad p = 0.$

(i) 의 경우;

(1) $m = 1, \quad p = 1$ 인 경우; $x = 5k+1, \quad y = 5l+1, \quad 0 \le k, l \le n.$
따라서, $(n+1)^2$ 가지이다.

(2) $m = 1, \quad p = -1$ 인 경우; $x = 5k+1, \quad y = 5l-1, \quad 0 \le k \le n, 1 \le l \le n.$
따라서, $n(n+1)$ 가지이다.

(3) $m = -1, \quad p = 1$ 인 경우; $x = 5k-1, \quad y = 5l+1, \quad 1 \le k \le n, 0 \le l \le n.$
따라서, $n(n+1)$ 가지이다.

(4) $m = p = -1$ 인 경우; $x = 5k-1, \quad y = 5l-1, \quad 1 \le k, l \le n.$
따라서, n^2 가지이다.

그러므로, $m = \pm1, p = \pm1$ 인 경우의 수:

$$(n+1)^2 + 2n(n+1) + n^2 = (2n+1)^2.$$

(ii) 의 경우;

(1) $m = 2, \quad p = 2$ 인 경우; $x = 5k+2, \quad y = 5l+2, \quad 0 \le k, l \le n.$
따라서, $(n+1)^2$ 가지이다.

(2) $m = 2, \quad p = -2$ 인 경우; $x = 5k+2, \quad y = 5l-2, \quad 0 \le k \le n, 1 \le l \le n.$
따라서, $n(n+1)$ 가지이다.

(3) $m = -2, \quad p = 2$ 인 경우; $x = 5k-2, \quad y = 5l+2, \quad 1 \le k \le n, 0 \le l \le n.$
따라서, $n(n+1)$ 가지이다.

(4) $m = p = -2$ 인 경우; $x = 5k-2, \quad y = 5l-2, \quad 1 \le k, l \le n.$
따라서, n^2 가지이다.

그러므로, $m = \pm2, p = \pm2$ 인 경우의 수:

$$(n+1)^2 + 2n(n+1) + n^2 = (2n+1)^2.$$

(iii) $m = p = 0$ 인 경우; $x = 5k, \quad y = 5l, \quad 1 \le k, l \le n.$
따라서, n^2 가지이다.
그러므로, $3x^2 + 2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 경우의 수는

$$(2n+1)^2 + (2n+1)^2 + n^2 = 9n^2 + 8n + 2.$$

제 1 분야 (1차시험) 문제4 번
제 2 분야 (1차시험) 문제4 번

[문 제]
일의 자리수가 6인 11진법의 양의 수 A가 있다. 수 A의 가장 높은 자리의 수를 일의 자리로 옮기고, 나머지 각 자리의 수를 왼쪽으로 순차적으로 옮겨서 새로운 11진법의 수 B를 얻는다. (예 : $A = abc6 \Longrightarrow B = bc6a$)
이 때, 1보다 큰 어떤 자연수 n 대하여 다음 방정식

$$(A - B) \times 4 = A \times n$$

을 만족하는 4자리 이상의 11진법의 수 A를 가장 작은 수 부터 차례로 2개만 찾아라.
[풀 이]
$(A - B) \times 4 = A \times n$ 으로 부터 $A \times (4 - n) = B \times 4$을 얻는다.
여기서 가능한 자연수 n 은 2 또는 3 이다.
$A = mX_kX_{k-1} \cdots X_2X_16$ 이라 하면,
$B = X_kX_{k-1} \cdots X_2X_16m$ 이다.
단, m 과 X_i 는 $0, 1, 2, \cdots, 8, 9, T(= 9 + 1)$ 중 하나이다.

(i) $n = 2$ 일 때

$$\text{준식}; mX_kX_{k-1} \cdots X_2X_16 = X_kX_{k-1} \cdots X_2X_16m \times 2.$$

$m \times 2$ 를 11 로 나누었을 때 나머지가 6 이 되는 경우

$$m = 3.$$

따라서, $A = 3X_kX_{k-1} \cdots X_2X_16$.

$$\text{준식}; 3X_kX_{k-1} \cdots X_2X_16 = X_kX_{k-1} \cdots X_2X_163 \times 2.$$

$63 \times 2 = 116$ 이므로 $X_1 = 1$. 따라서, $A = 3X_kX_{k-1} \cdots X_216$.

$$\text{준식}; 3X_kX_{k-1} \cdots X_216 = X_kX_{k-1} \cdots X_2163 \times 2.$$

$163 \times 2 = 316$ 이므로 $X_2 = 3$. 따라서, $A = 3X_kX_{k-1} \cdots X_3316$.
여기서, 11진법의 수 316, 316316, 316316316등이 $A = B \times 2$를 만족함을 알 수 있다. 그러므로 4자리 이상의 11진법의 수로서 $A = B \times 2$를 만족하는 수를 작은순서 대로 2개를 쓰면 316316, 316316316이다

(ii) $n = 3$ 일 때

$$\text{준식}; mX_kX_{k-1} \cdots X_2X_16 = X_kX_{k-1} \cdots X_2X_16m \times 4.$$

$m \times 4$ 를 11 로 나누었을 때 나머지가 6 이 되는 경우

$$m = 7.$$

따라서, $A = 7X_kX_{k-1} \cdots X_2X_16$.

$$\text{준식}; 7X_kX_{k-1} \cdots X_2X_16 = X_kX_{k-1} \cdots X_2X_167 \times 4.$$

$67 \times 4 = 246$ 이므로 $X_1 = 4$. 따라서, $A = 7X_kX_{k-1} \cdots X_246$.

$$\text{준식}; 7X_kX_{k-1} \cdots X_246 = X_kX_{k-1} \cdots X_2467 \times 4.$$

$467 \times 4 = 1746$ 이므로 $X_2 = 7$. 따라서, $A = 7X_kX_{k-1}\cdots X_3746$.

$$준식; 7X_kX_{k-1}\cdots X_3746 = X_kX_{k-1}\cdots X_37467 \times 4.$$

$7467 \times 4 = 27746$ 이므로 $X_3 = 7$. 따라서, $A = 7X_kX_{k-1}\cdots X_47746$.

$$준식; 7X_kX_{k-1}\cdots X_47746 = X_kX_{k-1}\cdots X_477467 \times 4.$$

$77467 \times 4 = 287746$ 이므로 $X_4 = 8$. 따라서, $A = 7X_kX_{k-1}\cdots X_587746$.

$$준식; 7X_kX_{k-1}\cdots X_587746 = X_kX_{k-1}\cdots X_5877467 \times 4.$$

$877467 \times 4 = 3187746$ 이므로 $X_5 = 1$. 따라서, $A = 7X_kX_{k-1}\cdots X_6187746$.

$$준식; 7X_kX_{k-1}\cdots X_6187746 = X_kX_{k-1}\cdots X_61877467 \times 4.$$

$1877467 \times 4 = 7187746$ 이므로 $X_6 = 7$. 여기서, 11진법의 수 7187746이 $A = B \times 4$를 만족함을 알 수 있다.

$(i)(ii)$에 의하여 구하는 11 진법의 수는

$$316316, \qquad 7187746$$

제 1 분야 (2차시험) 문제1 번
제 2 분야 (2차시험) 문제1 번

[**문 제**]

n 이 5이상의 자연수일 때, $\dfrac{10^{2^{(n-5)}}+1}{10^{2^n}+3}$ 이 기약분수임을 보여라.

[**풀 이**]

주어진 분수의 분모와 분자의 (최대)공약수를 p라 하자. 그러면,

$$10^{2^{(n-5)}}+1=pk,\quad 10^{2^n}+3=pl$$

이 되는 자연수 k 와 l 이 있다. 그리고

$$\begin{aligned}(10^{2^n}+3)-4&=10^{2^n}-1\\&=(10^{2^{(n-1)}})^2-1\\&=(10^{2^{(n-1)}}+1)(10^{2^{(n-1)}}-1)\\&\qquad\vdots\\&=(10^{2^{(n-1)}}+1)(10^{2^{(n-2)}}+1)\cdots(10^{2^{(n-5)}}+1)(10^{2^{(n-5)}}-1)\\&=(10^{2^{(n-1)}}+1)(10^{2^{(n-2)}}+1)\cdots(10^{2^{(n-4)}}+1)(pk)(10^{2^{(n-5)}}-1).\end{aligned}$$

따라서, $pl-4=pk'$ 인 자연수 k' 가 존재한다.
그러므로, p는 4를 나눈다. 즉, $p=1,2$ 또는 4.
분모(또는 분자)가 홀수이므로 $p=1$.
따라서, 주어진 수는 기약분수이다.

[**별 해**]

주어진 분수의 분모와 분자의 (최대)공약수를 p라 하자. 그러면,

$$\begin{aligned}10^{2^{(n-5)}}+1=pk,&\quad 10^{2^n}+3=pl\\ \text{즉},\quad 10^{2^{(n-5)}}=pk-1,&\quad 10^{2^n}=pl-3\end{aligned}$$

인 자연수 k 와 l 이 존재한다.
그리고

$$pl-3=10^{2^n}=(10^{2^{(n-5)}})^{2^5}=(pk-1)^{2^5}=pk'+1$$

인 자연수 k' 가 존재한다. 여기서,

$$p(l-k')=4.$$

따라서 p는 4를 나누므로 $p=1,2$ 또는 4.
그런데, 분모(또는 분자)가 홀수이므로 $p=1$.
따라서, 주어진 수는 기약분수이다.

제 1 분야 (2차시험) 문제2 번
제 2 분야 (2차시험) 문제2 번

[문 제]
자연수 전체의 집합을 $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$에서 $\mathbb{N}$으로 가는 모든 함수들의 집합을 S라 하자. 임의의 서로 다른 함수 $f, g \in S$에 대하여

$$d(f,g) = \frac{1}{m+1}$$

로 정의한다. 단, $m = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq g(x)\}$. 또, 임의의 함수 $f \in S$ 와 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f_n \in S$를 $f_n(x) = f([\sqrt[n]{x}])$, $x \in \mathbb{N}$, 로 정의하자. (단, $[x]$는 x보다 크지않은 최대의 정수)
이 때, 두 함수 $f(x) = x^3 + 11x$, $g(x) = 6x^2 + 6$ 에 대하여

$$d(f_n, g_n) < \frac{1}{2^{1997}+1}$$

을 만족하는 자연수 n의 범위를 구하여라.
[풀 이]
$f_n(x) \neq g_n(x)$ 인 최소의 자연수 x 를 m 이라 하면

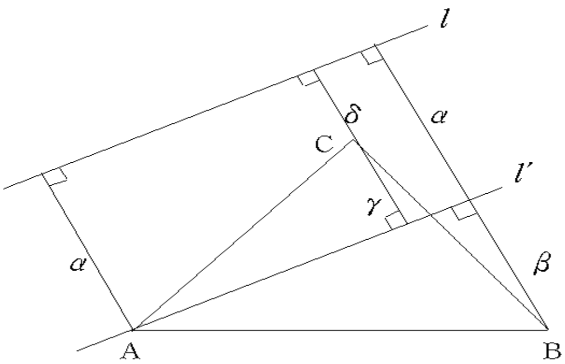
$$d(f_n, g_n) = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{2^{1997}+1}.$$

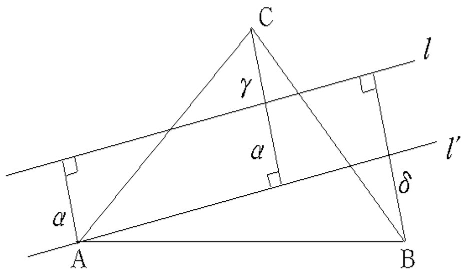
따라서 $m > 2^{1997}$.
그러므로 $f_n(2^{1997}) = g_n(2^{1997})$, 즉, $f([(2^{1997})^{\frac{1}{n}}]) = g([(2^{1997})^{\frac{1}{n}}])$.
그런데, $f(x) = g(x)$ 일 필요충분조건은 $x = 1, 2, 3$ 이다.
따라서, $[(2^{1997})^{\frac{1}{n}}] \leq 3$, 즉, $(2^{1997})^{\frac{1}{n}} < 4$.
$4^n = 2^{2n} > 2^{1997}$.
그러므로, 구하는 자연수 n 의 범위는 $n \geq 999$.

제 1 분야 (2차시험) 문제3 번

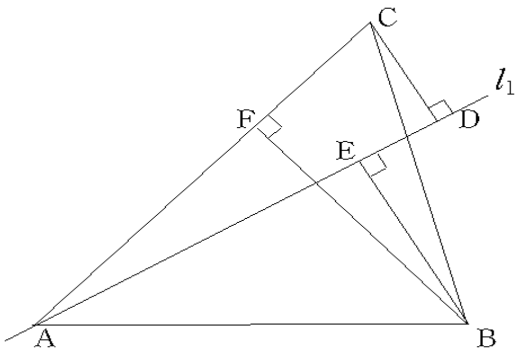
[문 제]
평면 위의 세 점 $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(a,b)$가 있다. 주어진 세 점 A, B, C 에서 이 평면 위의 임의의 직선 l 까지의 거리의 합을 $d(l)$ 이라 할 때, $d(l)$ 의 최소값을 구하여라. (단, a, b는 서로 다른 실수)

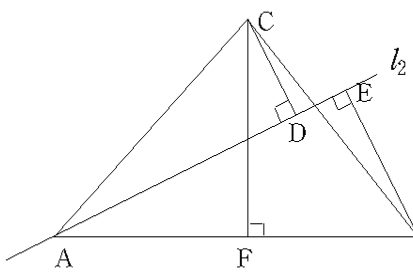
[풀 이]
세 점 A, B, C 에서 직선 l 까지의 거리의 합을 $d(l)$ 로 놓자.
임의의 직선 l 이 주어졌을 때, 직선 l 을 평행이동하여 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 한 꼭지점과 그 대변상의 한 점을 지나는 직선을 l' 라 하면, $d(l) \geq d(l')$ 이다.





따라서 $d(l)$ 의 최소값을 구하려면 $\triangle ABC$ 의 한 꼭지점과 그 대변상의 한 점을 지나는 직선만 생각하면 충분하다.
그림과 같이 점 A 를 지나는 직선 l_1, l_2 가 주어졌다.





$\overline{BF} < \overline{CDBE}$ 이므로 $d(l_1) > d(\overleftrightarrow{AC})$
$\overline{CF} < \overline{CD} + \overline{BE}$ 이므로 $d(l_2) > d(\overleftrightarrow{AB})$.
따라서 $d(l)$ 의 최소값을 구하기 위해 세 직선 $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ 만 생각하면 충분하다.

세 직선 $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ 의 방정식은 다음과 같다.
직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 의 방정식; $x - y = 0$.
직선 $\overleftrightarrow{BC}$ 의 방정식; $(b-1)x - (a-1)y + (a-b) = 0$.
직선 $\overleftrightarrow{CA}$ 의 방정식; $bx - ay = 0$.

따라서,

$$d(\overleftrightarrow{AB}) = \frac{|\, a-b \,|}{\sqrt{2}}$$
$$d(\overleftrightarrow{BC}) = \frac{|\, a-b \,|}{\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}}$$
$$d(\overleftrightarrow{CA}) = \frac{|\, a-b \,|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

그러므로,

(i) $a^2+b^2 \leq 2, \quad (a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2$ 인 경우

$d(l)$ 의 최소값은 $\dfrac{|\, a-b \,|}{\sqrt{2}}$.

(ii) $a^2+b^2 \geq 2, \quad a^2+b^2 \geq (a-1)^2+(b-1)^2$ 인 경우

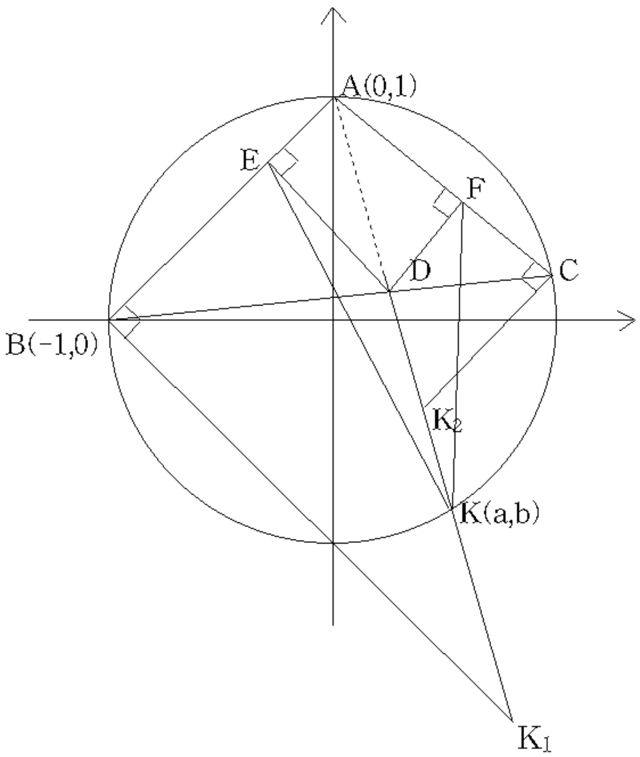
$d(l)$ 의 최소값은 $\dfrac{|\, a-b \,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(iii) $(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 2, \quad (a-1)^2+(b-1)^2 \geq a^2+b^2$ 인 경우

$d(l)$ 의 최소값은 $\dfrac{|\, a-b \,|}{\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}}$.

제 2 분야 (2차시험) 문제3 번

[문 제]
평면위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 S가 있다. 두 점 $A(0,1)$, $B(-1,0)$가 주어졌을 때, $\angle BAC = \frac{5}{9}\pi$가 되는 점 C를 원 S위에 잡는다. S위의 점$K(a,b)$가 $a \geqq 0, b < 0$를 만족하는 점일 때 $\overline{AK}$와 $\overline{BC}$가 만나는 점을 D라하자. 점D에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 할 때, $\triangle ABC$와 $\square AEKF$의 면적이 같게되는 점 K의 좌표를 모두 구하시오. (단, $\tan\frac{\pi}{36} = p$)
[풀 이]
그림과 같이 구하는 점을 K, 각 $\angle BAK = \alpha_1$, 각 $\angle CAK = \alpha_2$ 라 두면,



$$AK \cdot BC = AB \cdot KC + AC \cdot BK$$
$$AK \cdot 2\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = AB \cdot 2\sin\alpha_2 + AC \cdot 2\sin\alpha_1.$$

따라서,
$$AK = \frac{AB\sin\alpha_2 + AC\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

$[ABC]$ 을 $\triangle ABC$ 의 면적이라 두고, $[AEKF]$ 을 $\square AEKF$ 의 면적이라 두면
$$\begin{aligned}[ABC] &= [ABD] + [ACD] \\ &= \frac{1}{2}AD(AB\sin\alpha_1 + AC\sin\alpha_2)\end{aligned}$$

이고
$$\begin{aligned}[AEKF] &= [AEK] + [AFK] \\ &= \frac{1}{2}AK(AE\sin\alpha_1 + AF\sin\alpha_2) \\ &= \frac{1}{2}AK(AD\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + AD\cos\alpha_2\sin\alpha_2).\end{aligned}$$

가정에 의하여 $[ABC] = [AEKF]$ 이므로

$$AB \sin\alpha_1 + AC \sin\alpha_2 = AK(\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 + \cos\alpha_2 \sin\alpha_2).$$

여기에 AK 를 대입하면

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha_1+\alpha_2)(AB\sin\alpha_1 + AC\sin\alpha_2)\\ &\quad = (AB\sin\alpha_2 + AC\sin\alpha_1)(\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + \cos\alpha_2\sin\alpha_2).\end{aligned}$$

양변을 정리하면

$$(AB\cos\alpha_2 - AC\cos\alpha_1)(\sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_2) = 0.$$

따라서, $[ABC] = [AEKF]$ 일 필요충분조건은

$$AB\cos\alpha_2 = AC\cos\alpha_1 \text{ 또는 } \alpha_1 = \alpha_2.$$

(i) $AB\cos\alpha_2 = AC\cos\alpha_1$ 인 경우.
$\overrightarrow{AK}$ 위에 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BK_1}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CK_2}$ 인 점 K_1, K_2 를 잡으면

$$\cos\alpha_1 = \frac{AB}{AK_1}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{AC}{AK_2}.$$

따라서,

$$AK_1 = AK_2.$$

그러므로, $K_1 = K_2 = K$, 즉, $K = (0, -1)$.

(ii) $\alpha_1 = \alpha_2$ 인 경우.
직선 AK 가 y 축과 이루는 각은 $\frac{\pi}{36}$ 이다.
따라서, $\overleftrightarrow{AK}$ 의 방정식은 $y = 1 - \dfrac{1}{p}x$ 이다.
그러므로, 점 K 의 좌표는 $(\dfrac{2p}{p^2+1}, \dfrac{p^2-1}{p^2+1})$ 이다.