충남대학교 주최

제 6 회 전국 고등학교 수학경시대회 모범답안

[문제 1번]

임의의 복소수 z에 대하여

$$\frac{1}{4z(1-z)} \in (0,1]$$

일 필요충분조건은 z의 실수부분이 $\frac{1}{2}$임을 증명하시오.

[풀 이] **[충분조건]** $z = x + iy$라 두고 $x = \frac{1}{2}$임을 보이면 된다.

$$\frac{1}{4z(1-z)} = \frac{1}{4(x+iy)(1-x-iy)} = \frac{1}{4(x-x^2+y^2+i(1-2x)y)}$$

$\frac{1}{4z(1-z)}$는 실수이므로 $(1-2x)y = 0$. 따라서

$$y = 0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$y = 0$ 이면 $0 < \frac{1}{4z(1-z)} \leq 1$에 의하여

$$\frac{1}{4z(1-z)} = \frac{1}{4x(1-x)} \leq 1$$

그러므로 $4x(1-x) \geq 1$. 즉,

$$(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$
그러므로 z의 실수부분은 $\frac{1}{2}$이다.

[필요조건] z의 실수부분이 $\frac{1}{2}$이라고 가정하면

$$z = \frac{1}{2} + iy$$

단, y는 실수이다. 따라서

$$\frac{1}{4z(1-z)} = \frac{1}{4(\frac{1}{2}+iy)(\frac{1}{2}-iy)} = \frac{1}{4(\frac{1}{4}+y^2)} = \frac{1}{1+4y^2}$$

$1 + 4y^2 \geq 1$이므로

$$0 < \frac{1}{4z(1-z)} \leq 1$$

[별 해 1] **[충분조건]** $\frac{1}{4z(1-z)} \in (0,1]$ 라고 가정하면 다음을 만족하는 $x \in (0,1]$가 존재한다.

$$\frac{1}{4z(1-z)} = x$$

위식을 정리하면 다음의 이차방정식을 얻는다.

$$4xz^2 - 4xz + 1 = 0$$

위의 이차방정식을 z에 대하여 풀면,

$$z = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 16x}}{8x} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{x - x^2}}{2x}$$

$0 < x \leq 1$이므로 $x - x^2 \geq 0$. 따라서

$$\frac{\sqrt{x - x^2}}{2x} : \text{ 실수}$$

그러므로 z의 실수부분은 $\frac{1}{2}$이다.

[별 해 2] [충분조건] $z(1-z)$가 실수이므로

$$\overline{z}(1 - \overline{z}) = z(1 - z)$$

$z = x + iy$라 두고 정리하면

$$\begin{aligned}(x - iy)(1 - x + iy) &= (x + iy)(1 - x - iy) \\ x(1 - x) + y^2 + (2xy - y)i &= x(1 - x) + y^2 + (y - 2xy)i\end{aligned}$$

따라서 $y(2x - 1) = 0$. 즉,

$$y = 0 \text{ 또는 } x = \tfrac{1}{2}$$

$y = 0$이면 $0 < \frac{1}{4z(1-z)} \leq 1$에 의하여

$$\frac{1}{4z(1 - z)} = \frac{1}{4x(1 - x)} \leq 1 \tag{1}$$

$1 - 4x + 4x^2 = (1 - 2x)^2 \geq 0$ 이므로

$$4x(1 - x) \leq 1 \tag{2}$$

식 (1), (2)에 의하여

$$\frac{1}{4x(1 - x)} = 1$$

그러므로 $x = \frac{1}{2}$

[문제 2번]

구간 $(0, \infty)$에서 정의된 미분가능한 두 함수 f, g 가 모든 양수 x, y 에 대하여 다음을 만족한다.

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad g(xy) = g(x) + g(y)$$

이 때 어떤 양수 a 에 대하여 $g(a) = 1$ 이면 모든 양수 x 에 대하여

$$f(x) = f(a)g(x)$$

가 성립함을 증명하시오.

[풀 이] 양수 b에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$f(bx) = f(b) + f(x), \quad x > 0$$

위 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$bf'(bx) = f'(x), \quad x > 0$$

따라서

$$f'(x) = bf'(bx), \quad x > 0,\ b > 0$$

$x = 1,\ b = y$라 하면

$$yf'(y) = f'(1) \quad y > 0$$

$f'(1) = c_1$ 이라 하고 y를 x로 바꾸면

$$f'(x) = \frac{c_1}{x}, \quad x > 0 \tag{3}$$

> **[다른방법]** $f(1) = g(1) = 0,\ f(\frac{1}{x}) = -f(x),\ g(\frac{1}{x}) = -g(x)$이 성립하고 f는 미분가능하므로 모든 $x > 0$에 대하여
>
> $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{f'(1)}{x} \end{aligned}$$

마찬가지 방법으로 $g'(1) = c_2$라 하면

$$g'(x) = \frac{c_2}{x}, \quad x > 0 \tag{4}$$

그러므로 적당한 상수 c에 대하여

$$f'(x) = cg'(x), \quad x > 0$$

따라서 적당한 상수 d에 대하여

$$f(x) = cg(x) + d, \quad x > 0$$

한편 $f(1) = g(1) = 0$이므로 $(\because \quad f(1) = f(1) + f(1),\ g(1) = g(1) + g(1))$

$$d = 0$$

따라서

$$f(x) = cg(x), \quad x > 0$$

$g(a) = 1$이므로 위 식에서 $c = f(a)$. 그러므로

$$f(x) = f(a)g(x), \quad x > 0$$

> **[다른방법]** 식 (3)에서 $f(x) = c_1 \ln x + d$ ($x > 0,\ d$는 상수)
> $f(1) = 0$이므로 $d = 0$. 따라서
>
> $$f(x) = c_1 \ln x, \quad x > 0$$
>
> 마찬가지 방법으로 식 (4)에서
>
> $$g(x) = c_2 \ln x, \quad x > 0$$
>
> $g(a) = 1$이므로 $c_2 \neq 0$. 따라서
>
> $$f(x) = \frac{c_1}{c_2}g(x), \quad x > 0$$
>
> $g(a) = 1$이므로 위 식에서 $\frac{c_1}{c_2} = f(a)$. 그러므로
>
> $$f(x) = f(a)g(x), \quad x > 0$$

[별 해 1] 양수 b에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$f(bx) = f(b) + f(x), \quad x > 0$$

위 식의 양변을 미분하면

$$bf'(bx) = f'(x), \quad x > 0$$

따라서

$$xf'(x) = bxf'(bx), \quad x > 0,\ b > 0 \tag{5}$$

그러므로 함수 $xf'(x)$는 $(0, \infty)$에서 상수함수가 된다.

> ($\because$) $h(x) = xf'(x)$ 라 하면 (5)에 의해
>
> $$h(x) = h(bx), \quad x > 0,\ b > 0$$
>
> $x_1 > x_2 > 0,\ b = \frac{x_1}{x_2}$라 하면
>
> $$h(x_1) = h(bx_2) = h(x_2)$$
>
> 따라서 $h(x)$는 상수함수이다.

마찬가지 방법으로 $xg'(x)$도 $(0, \infty)$에서 상수함수가 되므로 적당한 상수 c에 대하여

$$xf'(x) = cxg'(x), \quad x > 0$$

따라서

$$f'(x) = cg'(x), \quad x > 0$$

그러므로 적당한 상수 d에 대하여

$$f(x) = cg(x) + d, \quad x > 0$$

한편 $f(1) = g(1) = 0$이므로 ($\because f(1) = f(1) + f(1),\ g(1) = g(1) + g(1)$)

$$d = 0$$

따라서

$$f(x) = cg(x), \quad x > 0$$

$g(a) = 1$이므로 위 식에서 $c = f(a)$. 그러므로

$$f(x) = f(a)g(x), \quad x > 0$$

[별 해 2] $F(x) = f(e^x),\ (x \in \mathbb{R})$ 이라 두면 함수 F는 실수전체에서 미분가능하고

$$F(\ln x) = f(x),\ x > 0$$

그리고 $x > 0,\ y > 0$ 일 때

$$F(\ln x + \ln y) = F(\ln xy) = f(xy) = f(x) + f(y) = F(\ln x) + F(\ln y)$$

한편 로그함수 $\ln x$ 의 치역은 실수전체이므로

$$F(x + y) = F(x) + F(y), \quad x,\ y \in \mathbb{R}$$

따라서 적당한 실수 c가 존재하여 다음이 성립한다.

$$F(x) = cx, \quad x \in \mathbb{R}$$

$(\because)$ $F(0) = f(1) = 0$이므로

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{F(x)+F(h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to0}\frac{F(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to0}\frac{F(0+h)-F(0)}{h} \\ &= F'(0) \end{aligned}$$

$F'(0) = c$ 라 하면 $F(x) = cx, \quad x \in \mathbb{R}$

따라서

$$f(x) = F(\ln x) = c\ln x, \quad x > 0$$

마찬가지로 적당한 상수 d에 대하여 다음이 성립한다.

$$g(x) = d\ln x, \quad x > 0$$

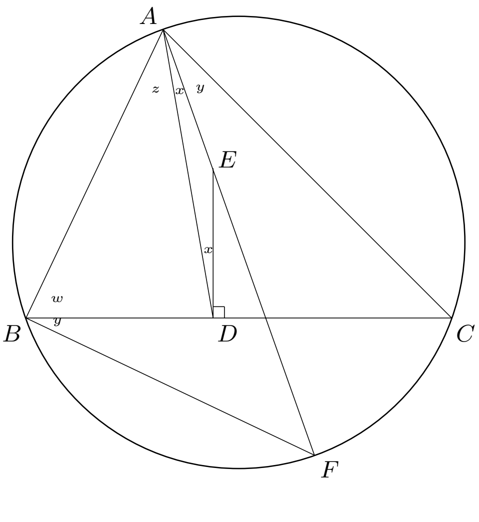
$f(a) = c\ln a = 1$ 이므로 $g(a) = d\ln a = \frac{d}{c}$. 따라서

$$f(x) = c\ln x = \frac{c}{d}\,d\ln x = \frac{c}{d}\,g(x) = g(a)g(x)$$

[문제 3번]

예각삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 BC 와 만나는 점을 D 라 하자. 점 D를 지나고 BC 에 수직인 직선이 선분 AD 의 수직이등분선과 만나는 점을 E 라 하고 직선 AE 가 $\triangle ABC$ 의 외접원과 만나는 점을 F 라 하자. $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\sin C = d$ 라 할 때 $\overline{AF}$ 를 a, b, c, d 로 나타내시오.

[풀 이] 원주각의 성질에 의해 다음 그림이 성립한다.



$\angle BAD = \angle DAC$이므로

$$z = x + y$$

$\overline{ED} \perp \overline{BC}$이므로 $\triangle ABD$에서

$$w + z = x + 90^\circ$$

따라서

$$w + y = 90^\circ$$

즉

$$\angle ABF = 90^\circ$$

따라서 AF는 $\triangle ABC$의 외접원의 지름이다. 그러므로

$$\sin C = \sin F = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{c}{\overline{AF}}$$

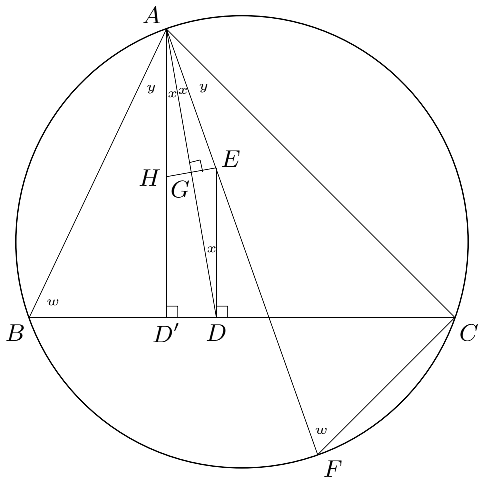
즉,

$$\overline{AF} = \frac{c}{d}$$

[참고] 이등변삼각형의 경우 위의 그림에서 $x = 0$ 이다.

[**별 해**] A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D', AD의 중점을 G, 직선 EG와 선분 AD'의 교점을 H라 하면, $\overline{AD'}$ 과 $\overline{ED}$ 가 모두 $\overline{BC}$에 수직하므로

$$\overline{AD'} \,//\, \overline{ED}$$



따라서

$$\begin{aligned} \angle GAH &= \angle GDE \\ \overline{GA} &= \overline{GD} \\ \angle AGH &= \angle DGE \end{aligned}$$

그러므로

$$\triangle GAH \equiv \triangle GDE$$

한편 $\overline{GE}$는 $\overline{AD}$의 수직이등분선이므로

$$\triangle GDE \equiv \triangle GAE$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\angle BAD' = \angle BAD - \angle GAH = \angle DAC - \angle GAE = \angle FAC$$

그리고 원주각의 성질에 의하여 다음식이 성립한다.

$$\angle ABD' = \angle AFC$$

그러므로 $\triangle ABD'$와 $\triangle AFC$ 는 서로 닮음이다. 따라서

$$\angle ACF = \angle AD'B = 90^\circ$$

따라서 AF는 $\triangle ABC$의 외접원의 지름이다. 그러므로

$$\sin C = \sin \angle AFB = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{c}{\overline{AF}}$$

즉,

$$\overline{AF} = \frac{c}{d}$$

[참고] 이등변삼각형의 경우 위의 그림에서 $x = 0,\ G = E = H,\ D = D'$ 이 성립한다.

[1분야 문제 4번]

점 P 가 좌표평면의 원점에 있다. 앞면이 나올 확률이 p 인 동전을 던져서 앞면이 나오면 점 P 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 움직이고, 뒷면이 나오면 y 축의 양의 방향으로 1만큼 움직이는 실험을 점 P 의 x 좌표가 10이 되거나 또는 y 좌표가 10이 될 때까지 계속한다.

(a) 실험이 끝났을 때 점 P 의 좌표가 $(10, 7)$이 될 확률을 구하시오.

(b) 실험이 끝났을 때 점 P 의 x 좌표와 y 좌표의 합 Z 의 확률분포를 구하시오.

[**풀 이**] (a) 실험이 끝났을 때 점 P의 좌표가 $(10, 7)$이 되려면 17회에 앞면이 나오고 16회 까지 앞면이 9번 뒷면이 7번 나와야한다. 그러므로 구하는 확률은 다음과 같다.

$$_{16}\mathrm{C}_9 p^9 q^7 p = {}_{16}\mathrm{C}_9 p^{10} q^7$$

(b) Z는 실험이 끝날때 까지 동전을 던진 회수가 된다. $q = 1-p$라 하면

$$\begin{aligned} P(Z=z) &= P(z\text{번째 동전을 던진 후 } P\text{의 } x \text{ 좌표가 10이 된다}) \\ &\quad + P(z\text{번째 동전을 던진 후 } P\text{의 } y \text{ 좌표가 10이 된다}) \\ &= P(z-1\text{번 까지 앞면이 9 번})P(z\text{ 번째 앞면}) \\ &\quad + P(z-1\text{ 번 까지 뒷면이 9 번})P(z\text{ 번째 뒷면}) \\ &= {}_{z-1}\mathrm{C}_9 p^9 q^{z-10}\cdot p + {}_{z-1}\mathrm{C}_9 q^9 p^{z-10}\cdot q \\ &= {}_{z-1}\mathrm{C}_9 p^{10} q^{z-10} + {}_{z-1}\mathrm{C}_9 q^{10} p^{z-10}, \quad z = 10, 11, \cdots, 19 \end{aligned}$$

[2분야 문제 4번]

갑이 이기면 2점, 비기면 1점, 지면 0점을 얻는 게임을 계속한다. 각 게임에서 갑이 이기는 확률은 $\frac{1}{2}$, 비기는 확률은 $\frac{1}{6}$, 지는 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

(a) 갑이 3점을 얻으면 게임이 끝난다고 할 때 갑이 3점을 얻을 확률을 구하시오.

(b) 갑이 n점을 얻으면 게임이 끝난다고 할 때 갑이 $n(\geq 4)$점을 얻을 확률 p_n을 구하시오.

[풀 이] a) 3점을 얻는 경우는 다음과 같다

(i) 1점 + 2점 또는 2점 + 1점

(ii) 1점 + 1점 + 1점

따라서 구하는 확률은

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^l\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\right\}\times 2 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^l\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{25}{2^6}$$

[다른방법] n점을 얻을 확률을 P_n이라 하고, 이기는 경우, 비기는 경우 지는 경우를 각각 ○, △, ×로 나타내자.

(1) 1점을 얻는 경우

△	$\frac{1}{6}$
× + 1점	$\frac{1}{3}P_1$

따라서 $P_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}P_1$. 그러므로 $P_1 = \frac{1}{4}$

(2) 2점을 얻는 경우

○	$\frac{1}{2}$
△ + 1점	$\frac{1}{6}P_1$
× + 2점	$\frac{1}{3}P_2$

따라서 $P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{3}P_2$. 그러므로 $P_2 = \frac{13}{16}$

(3) 3점을 얻는 경우

○ + 1점	$\frac{1}{2}P_1$
△ + 2점	$\frac{1}{6}P_2$
× + 3점	$\frac{1}{3}P_3$

따라서 $P_3 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{6}P_2 + \frac{1}{3}P_3$. 그러므로 $P_3 = \frac{25}{64}$

b) n점을 얻을 확률을 P_n이라 하면 다음의 점화식을 얻는다.

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-2} + \frac{1}{6}P_{n-1} + \frac{1}{3}P_n$$

따라서

$$P_n = \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{3}{4}P_{n-2}$$

즉,

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{3}{4}(P_{n-1} - P_{n-2})$$

계산하면

$$P_{n+1} - P_n = (P_2 - P_1)\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{9}{16}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

그러므로

$$P_n = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{9}{16}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{4}{7} - \frac{9}{28}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

[문제 5번]

방정식 $y^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5$의 정수해 (x, y)를 모두 구하시오.

[풀 이] $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5$이라 하자. $x^2 > 4$이면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)^2 - (x^2-4) < (x^2+x+1)^2 \\ f(x) &= (x^2+x)^2 + (x+1)^2 + 4 > (x^2+x)^2 \end{aligned}$$

따라서 $x^2 > 4$이면

$$(x^2+x)^2 < f(x) < (x^2+x+1)^2$$

이므로 $f(x)$는 정수의 제곱이 될 수 없다.
따라서 $-2 \le x \le 2$인 경우에만 $f(x)$는 정수의 제곱이 될 수 있다.
$-2 \le x \le 2$인 정수 x를 대입하면

$$f(2) = 49, f(1) = 12, f(0) = 5, f(-1) = 4, f(-2) = 9$$

따라서 $y^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5$의 정수해는 다음과 같다.

$$(2,7),\ (2,-7),\ (-1,2),\ (-1,-2)\ (-2,3),\ (-2,-3)$$

[별 해] $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5$이라 하면

$$f(x) = (x^2+x+1)^2 - (x^2-4)$$

1) $x^2 - 4 = 0$인 경우
$x = \pm 2,\ f(2) = 7^2,\ f(-2) = 3^2$이므로 정수해는

$$(2, \pm 7),\ (-2, \pm 3)$$

2) $x^2 - 4 < 0$인 경우

가능한 정수 x의 값은 $x = 0, x = \pm 1$ 그리고

$$f(0) = 5,\ f(-1) = 4 = 2^2,\ f(1) = 12$$

따라서 정수해는

$$(-1, \pm 2)$$

3) $x^2 - 4 > 0$인 경우 $x^2 - 4 > 0$이므로

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 4) < (x^2 + x + 1)^2$$

따라서 정수해가 존재한다면 다음이 성립한다.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5 \leq (x^2 + x)^2$$

즉,

$$x^2 + 2x + 5 \leq 0 \tag{6}$$

그러나 $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 > 0$이므로 식 (6)은 성립하지 않는다.
그러므로 이 경우에는 정수해가 존재하지 않는다.

따라서 $y^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5$ 의 정수해는 다음과 같다.

$$(2, 7),\ (2, -7),\ (-1, 2),\ (-1, -2),\ (-2, 3),\ (-2, -3)$$

[제1분야, 문제 6번]

임의의 실수 $x \in [0, 1]$를 다음과 같이 무한합으로 표현할 수 있다.

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

그러나 $\frac{q}{2^n}$ $(0 \leq q < 2^n,\ q$ 는 정수$)$ 꼴의 실수는 유한합으로도 표현되며 이 경우에는 유한합의 표현을 사용하기로 한다. 예를 들면 $\frac{1}{2}$을 $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$ 로 표현할 수도 있지만 $x = \frac{1}{2}$ 로 나타내기로 한다. 이 때 이러한 표현을 사용하여 함수 $f : [0, 1] \to [0, 1]$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \frac{x_4}{10^4}$$

적분값 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$을 구하시오.

(단, $g(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b) \\ d, & x = b \end{cases}$ 이면 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = c(b - a)$ 로 약속한다.)

[풀 이] $f(x) = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \frac{x_4}{10^4}$ 에서 x_i 는 0 또는 1 이므로, x_i가 1이 되는 범위를 찾아보자.

(1) $x_1 = 1$이면 x는 다음과 같다. 단, $x_i = 0,\ 1$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots$$

따라서 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. 그러므로 $x_1 = 1$이 되는 범위는

$$\left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$$

(2) $x_2 = 1$이면 x는 다음의 2가지 중 하나이다. 단, $x_i = 0,\ 1$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{4} \le x \le 1$. 그러므로 $x_2 = 1$이 되는 범위는

$$\left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) \cup \left[\tfrac{3}{4}, 1\right]$$

(3) $x_3 = 1$이면 x는 다음의 4가지 중 하나이다. 단, $x_i = 0,\ 1$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{8} \le x < \frac{1}{4},\ \frac{3}{8} \le x < \frac{1}{2},\ \frac{5}{8} \le x < \frac{3}{4},\ \frac{7}{8} \le x \le 1$.
그러므로 $x_3 = 1$이 되는 범위는

$$[\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}) \cup [\tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{2}) \cup [\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}) \cup [\tfrac{7}{8}, 1]$$

(4) $x_4 = 1$이면 x는 다음의 8가지 중 하나이다. 단, $x_i = 0,\ 1$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{16} \le x < \tfrac{1}{8},\ \tfrac{3}{16} \le x < \tfrac{1}{4},\ \tfrac{5}{16} \le x < \tfrac{3}{8},\ \tfrac{7}{16} \le x < \tfrac{1}{2}, \\ &\tfrac{9}{16} \le x < \tfrac{5}{8},\ \tfrac{11}{16} \le x < \tfrac{3}{4},\ \tfrac{13}{16} \le x < \tfrac{7}{8},\ \tfrac{15}{16} \le x \le 1 \end{aligned}$$

그러므로 $x_4 = 1$이 되는 범위는

$$[\tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{8}) \cup [\tfrac{3}{16}, \tfrac{1}{4}) \cup [\tfrac{5}{16}, \tfrac{3}{8}) \cup [\tfrac{7}{16}, \tfrac{1}{2}) \cup [\tfrac{9}{16}, \tfrac{5}{8}) \cup [\tfrac{11}{16}, \tfrac{3}{4}) \cup [\tfrac{13}{16}, \tfrac{7}{8}) \cup [\tfrac{15}{16}, 1]$$

따라서, 적분값을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \left(\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\frac{x_3}{10^3}+\frac{x_4}{10^4}\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{x_1}{10}\,dx+\int_0^1 \frac{x_2}{10^2}\,dx+\int_0^1 \frac{x_3}{10^3}\,dx+\int_0^1 \frac{x_4}{10^4}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}\times 1\right)+\left(\frac{1}{10^2}\times\frac{1}{4}\times 2\right)+\left(\frac{1}{10^3}\times\frac{1}{8}\times 4\right)+\left(\frac{1}{10^4}\times\frac{1}{16}\times 8\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}\right) \\
&= \frac{1111}{20000}
\end{aligned}$$

[별 해] 구간 $[0,1]$을 16등분하는 점을 $a_0, a_1, \cdots, a_{16}$라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{lllll}
a_0 = 0 & & & & f(a_0)=0 \\
a_1 = \frac{1}{16} & = & \frac{1}{2^4} & & f(a_1)=\frac{1}{10^4} \\
a_2 = \frac{2}{16} & = & \frac{1}{2^3} & & f(a_2)=\frac{1}{10^3}=\frac{10}{10^4} \\
a_3 = \frac{3}{16} & = & \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} & & f(a_3)=\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}=\frac{11}{10^4} \\
a_4 = \frac{4}{16} & = & \frac{1}{2^2} & & f(a_4)=\frac{1}{10^2}=\frac{100}{10^4} \\
a_5 = \frac{5}{16} & = & \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4} & & f(a_5)=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}=\frac{101}{10^4} \\
a_6 = \frac{6}{16} & = & \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3} & & f(a_6)=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}=\frac{110}{10^4} \\
a_7 = \frac{7}{16} & = & \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} & & f(a_7)=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}=\frac{111}{10^4} \\
a_8 = \frac{8}{16} & = & \frac{1}{2} & & f(a_8)=\frac{1}{10}=\frac{1000}{10^4} \\
a_9 = \frac{9}{16} & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^4} & & f(a_9)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^4}=\frac{1001}{10^4} \\
a_{10} = \frac{10}{16} & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3} & & f(a_{10})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}=\frac{1010}{10^4} \\
a_{11} = \frac{11}{16} & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} & & f(a_{11})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}=\frac{1011}{10^4} \\
a_{12} = \frac{12}{16} & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2} & & f(a_{12})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}=\frac{1100}{10^4} \\
a_{13} = \frac{13}{16} & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4} & & f(a_{13})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}=\frac{1101}{10^4} \\
a_{14} = \frac{14}{16} & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3} & & f(a_{14})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}=\frac{1110}{10^4} \\
a_{15} = \frac{15}{16} & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} & & f(a_{15})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}=\frac{1111}{10^4} \\
a_{16} = \frac{16}{16} & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} & & f(a_{16})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}=\frac{1111}{10^4}
\end{array}$$

각 구간 $[a_n, a_{n+1})$ $(n=0,1,2,\cdots,15)$에서 함수 f는 상수함수 $f(a_n)$이다.

$(\because)$ $x \in (a_n, a_{n+1})$ 라 하면 $x = a_n + b, \quad b \in (0, \frac{1}{16})$

한편 a_n과 b는 다음과 같이 놓을수 있다.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\frac{x_3}{2^3}+\frac{x_4}{2^4}, \quad x_i \in \{0,1\} \\
b &= \frac{y_5}{2^5}+\frac{y_6}{2^6}+\cdots, \quad y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\frac{x_3}{2^3}+\frac{x_4}{2^4}+\frac{y_5}{2^5}+\frac{y_6}{2^6}+\cdots$

그러므로 $f(a) = \frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\frac{x_3}{10^3}+\frac{x_4}{10^4} = f(a_n)$

따라서 적분을 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{16}(f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_{15})) = \frac{1}{16}\cdot\frac{1+21+422+8444}{10000} = \frac{1111}{20000}$$

[제2분야, 문제 6번]

$f(0)=0$인 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 임의의 실수 x_i $(1\le i\le 3^{2002})$에 대하여 다음 식을 만족한다. 단, $x_{3^{2002}+1}=x_1$.

$$3^{2002}f(\frac{x_1+\cdots+x_{3^{2002}}}{3^{2002}}) + 3\sum_{i=1}^{3^{2001}} f(\frac{x_{3i-2}+x_{3i-1}+x_{3i}}{3}) = 2\sum_{i=1}^{3^{2002}} f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$$

모든 실수 x,y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$가 성립함을 증명하시오.

[풀 이] x,y,z가 실수이고 $x_{3i-2}=x,\ x_{3i-1}=y,\ x_{3i}=z$ $(i=1,\cdots,3^{2001})$이면

$$3^{2002}f(\frac{x+y+z}{3}) + 3^{2002}f(\frac{x+y+z}{3}) = 2\cdot 3^{2001}\left(f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{y+z}{2})+f(\frac{z+x}{2})\right)$$

위 식에서 $z=-y$라 두면 $f(0)=0$이므로

$$2\cdot 3^{2002}f(\frac{x}{3}) = 2\cdot 3^{2001}\left(f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{x-y}{2})\right)$$

즉,

$$f(\frac{x}{3}) = \frac{1}{3}\left(f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{x-y}{2})\right),\quad x,y\in\mathbb{R} \tag{7}$$

식 (7)에서 $y=x$라 두면 $f(0)=0$이므로

$$f(\frac{x}{3}) = \frac{1}{3}f(x),\quad x\in\mathbb{R} \tag{8}$$

한편 식 (7)에서 x를 $3x$로, y를 x로 각각 바꾸어 쓰면

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(f(2x)+f(x)\right)$$

따라서

$$f(2x) = 2f(x),\quad x\in\mathbb{R} \tag{9}$$

그러므로 식 (7),(8),(9)에서

$$f(x) = 3f(\frac{x}{3}) = f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{x-y}{2}) = \frac{1}{2}f(x+y)+\frac{1}{2}f(x-y)$$

따라서

$$2f(x) = f(x+y)+f(x-y),\quad x,y\in\mathbb{R}$$

위 식에서 $x+y=z,\ x-y=w$라 두면 식 (9)에 의해

$$f(z)+f(w) = 2f(x) = 2f(\frac{z+w}{2}) = f(z+w),\quad z,w\in\mathbb{R}$$

[별 해] x, y가 실수이고 $x_1 = 2x,\ x_2 = 2y,\ x_3 = \cdots = x_{3^{2002}} = 0$이라 하면

$$3^{2002} f\left(\frac{2x+2y}{3^{2002}}\right) + 3f\left(\frac{2x+2y}{3}\right) = 2f(x+y) + 2f(x) + 2f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{10}$$

$y = 0$ 이라 하면

$$3^{2002} f\left(\frac{2x}{3^{2002}}\right) + 3f\left(\frac{2x}{3}\right) = 4f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

위 식에서 x 를 $x+y$로 바꾸면

$$3^{2002} f\left(\frac{2x+2y}{3^{2002}}\right) + 3f\left(\frac{2x+2y}{3}\right) = 4f(x+y), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{11}$$

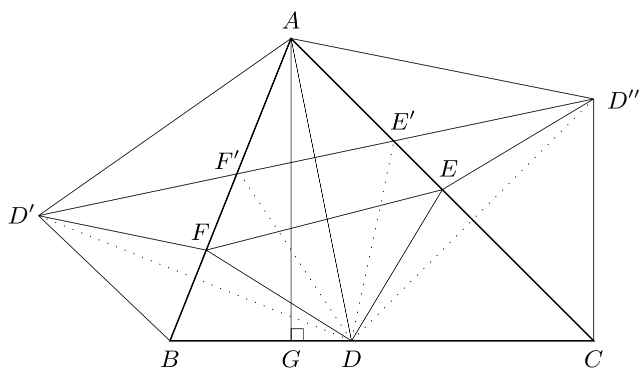
식 (10),(11)을 비교하면

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

[문제 7번]

세변의 길이가 각각 $a,\ b,\ c$ 인 예각삼각형 ABC 의 각 변에서 꼭지점이 아닌 점을 하나씩 잡아서 만든 삼각형의 둘레의 최소값을 a, b, c, S 로 나타내시오.
단, S 는 $\triangle ABC$ 의 면적이다.

[풀 이] 변 BC 위에 점 D를 고정하고 그림과 같이 점 E와 점 F를 각각 잡았다고 하자.
점 D'와 점 D''은 각각 변 AB와 변 CA에 대한 점 D의 대칭점이고 변 $D'D''$은 변 CA와 변 AB와 각각 점 E'과 점 F'에서 만난다.
$\overline{D'F} = \overline{DF},\ \overline{D''E} = \overline{DE}$이므로



$$\begin{aligned} &\triangle DEF\text{의 둘레} \\ &\quad = \overline{D'F} + \overline{FE} + \overline{ED''} \\ &\quad \geq \overline{D'D''} \\ &\quad = \triangle DE'F'\text{의 둘레} \end{aligned}$$

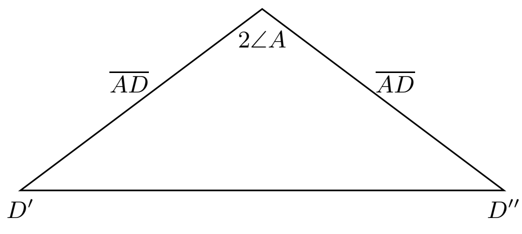
따라서 D를 고정하면 두 점 E, F가 각각 E', F'의 위치에 있을 때 $\triangle DEF$의 둘레는 최소값 $\overline{D'D''}$을 갖는다. 한편 $\overline{AD'} = \overline{AD} = \overline{AD''}$ 이므로

$$\overline{D'D''} = \text{꼭지각이 } 2\angle A \text{ 이고 등변의 길이가 } \overline{AD}\text{인 이등변 삼각형의 밑변의 길이}$$

한편 $2\angle A$는 정해져 있으므로 등변의 길이 $\overline{AD}$가 작을수록 $\overline{D'D''}$는 작아진다.
따라서 $\overline{D'D''}$은 선분 $\overline{AD}$가 변 $\overline{BC}$에 수직할 때 즉, $D = G$ 일 때 최소값을 가진다. $\triangle ABC$에서 선분 $\overline{AD}$가 변 $\overline{BC}$에 수직이면

$$\overline{AD} = c \sin B$$

$bc \sin A = ac \sin B = 2S$ 이므로



$$\begin{aligned} \overline{D'D''} &= 2\overline{AD} \sin A \\ &= 2c \sin B \sin A \\ &= \frac{8S^2}{abc} \end{aligned}$$

[최소값 구하는 다른 방법]

위의 그림에서 점 D를 고정하면 두 점 F, E가 각각 F', E'의 위치에 있을 때 $\triangle DEF$의 둘레는 최소값 $\overline{D'D''}$을 갖는다.

한편 $\triangle ABD \equiv \triangle ABD'$, $\triangle ACD \equiv \triangle ACD''$이므로

$$\overline{AD'} = \overline{AD} = \overline{AD''}, \quad \angle D'AD'' = 2\angle A$$

따라서 코사인법칙을 이용하면

$$\begin{aligned}
\overline{D'D''}^2 &= \overline{AD'}^2 + \overline{AD''}^2 - 2\overline{AD'} \cdot \overline{AD''} \cos 2A \\
&= 2\overline{AD}^2 - 2\overline{AD}^2 \cos 2A \\
&= 2\overline{AD}^2 (1 - \cos 2A) \\
&= 4\overline{AD}^2 \cdot \tfrac{1-\cos 2A}{2} \\
&= 4\overline{AD}^2 \sin^2 A
\end{aligned}$$

그러므로 D를 고정하였을 때 $\triangle DEF$의 둘레의 최소값은

$$\overline{D'D''} = 2\overline{AD} \sin A$$

따라서 D가 G의 위치에 있을 때 $\triangle DEF$의 둘레는 최소가 되며 이 때 최소값은

$$2\overline{AG} \sin A.$$

$a\overline{AG} = bc \sin A = 2S$이므로 구하는 최소값은

$$\frac{8S^2}{abc}$$
