충남대학교 주최

제 4 회 전국 고등학교 수학경시대회 모범답안

[문제 1번]

함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 미분가능하며, 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\le 1$이고 $f(-2)=2,\ f(2)=-2$일 때 $f(1)$의 값을 구하여라.

[**풀 이**] 구간 $[1,2]$에서 평균치정리를 이용하면,

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-2-f(1),\quad (\text{단}, 1<c<2)$$

한편 가정 $|f'(x)|\le 1$ 로 부터 $|f'(c)|=|-2-f(1)|\le 1$. 따라서

$$-3\le f(1)\le -1 \tag{1}$$

같은 방법으로 구간 $[-2,1]$에서 평균치정리를 이용하면,

$$|f'(d)|=|\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}|=|\frac{f(1)-2}{3}|\le 1,\quad (\text{단},\ -2<d<1)$$

따라서

$$-1\le f(1)\le 5 \tag{2}$$

그러므로 식 (1), (2)로 부터

$$f(1)=-1.$$

[문제 2 번]

n이 자연수일 때, $\dfrac{n^2+n}{2}$보다 작거나 같은 모든 자연수 k에 대하여 집합 $\{1,2,3,\cdots,n\}$의 부분집합 중 그 원소의 합이 k가 되는 부분집합이 존재함을 증명하여라.

[**풀 이**] 정수 k $(1\le k\le \dfrac{n^2+n}{2})$ 에 관하여 수학적 귀납법으로 증명한다.

(i) $k=1$이면 부분집합 $\{1\}$이 존재한다.

(ii) $1\le k<\dfrac{n^2+n}{2}$일 때 원소의 합이 k가 되는 부분집합 A가 존재한다고 가정하고 원소의 합이 $k+1$이 되는 부분집합 B가 존재함을 보이자.

$A^c=\{1,2,\cdots,n\}-A\ne\emptyset$이므로 $m=\min\{a\mid a\in A^c\}$라 하자.

$m=1$이면 $B=A\bigcup\{1\}$,

$m>1$이면 $B=(A-\{m-1\})\bigcup\{m\}$

이라 두면 집합 B는 $\{1,2,3,\cdots,n\}$의 부분집합이며 원소의 합이 $k+1$이 된다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 $1\le k\le\dfrac{n^2+n}{2}$인 모든 k에 대하여 원소의 합이 k가 되는 $\{1,2,3,\cdots,n\}$의 부분집합은 항상 존재한다.

[별 해] 주어진 k에 대하여 $k \le \dfrac{m^2+m}{2}$을 만족하는 가장 작은 자연수를 m이라 하면

$$\frac{m^2-m}{2} = \frac{(m-1)^2+(m-1)}{2} < k \le \frac{m^2+m}{2}.$$

$l = \dfrac{m^2+m}{2} - k$라 하면

$$0 \le l < \frac{m^2+m}{2} - \frac{m^2-m}{2} = m.$$

여기서

$$S = \{1, 2, 3, \cdots, m\} - \{l\}$$

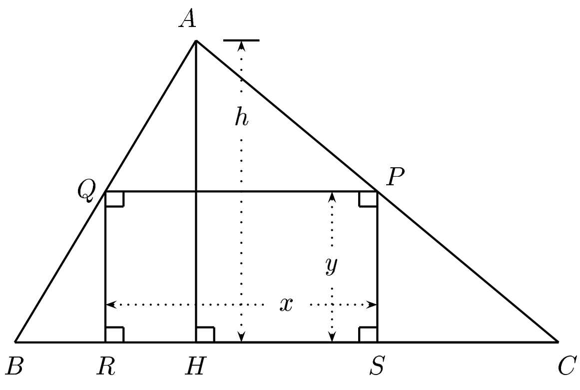
가 찾고자 하는 부분집합이다. 즉 다음이 성립한다.

$$\sum_{a \in S} a = \frac{m^2+m}{2} - \left(\frac{m^2+m}{2} - k\right) = k$$

[문제 3 번]

임의의 삼각형 ABC의 세 변위에 네 꼭지점이 있는 직사각형 중에서 그 넓이와 둘레가 각각 삼각형 ABC의 넓이와 둘레의 $\dfrac{1}{2}$이 되는 것은 존재하지 않음을 보여라.

[풀 이] 그러한 직사각형 $PQRS$가 존재한다고 가정하고 모순이 됨을 보이자.
$\overline{AB} = c,\ \overline{BC} = a,\ \overline{AC} = b$라 하고 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



위의 그림에서 $\triangle AQP \backsim \triangle ABC$이므로 $h - y : x = h : a$. 따라서

$$\begin{aligned} hx + ay &= ah & (3) \\ xy &= \frac{ah}{4} & (4) \\ 2(x+y) &= \frac{a+b+c}{2} & (5) \end{aligned}$$

식 (3), (4)를 연립하여 풀면

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{h}{2}.$$

이를 식 (5)에 대입하면

$$a + 2h = b + c.$$

한편

$$b+c=a+2h=\overline{CH}+h+\overline{BH}+h>b+c$$

이므로 이는 모순. 따라서 그러한 직사각형은 존재하지 않는다.

[제 1 분야, 문제 4 번]

n개의 상자에 같은 공 $2n$개를 임의로 넣을 때, 처음 r개의 상자에 k개의 공이 들어갈 확률 p_n과 $\lim_{n\to\infty} p_n$을 구하라. (단, $r<n$이고 $k<2n$이다.)

[풀 이] 처음 r개의 상자와 나머지 $n-r$개의 상자에 공이 들어갈 확률은 각각 $\frac{r}{n}$, $1-\frac{r}{n}$이므로 이항분포를 이용하면 확률 p_n은 다음과 같다.

$$p_n=\binom{2n}{k}\left(\frac{r}{n}\right)^k\left(1-\frac{r}{n}\right)^{2n-k}$$

n이 ∞로 갈 때 p_n의 극한을 구하면

$$\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{(2r)^k}{k!}e^{-2r}.$$

[주의] 2개의 상자에 4개의 공을 넣을 때 (0,4), (1,3)의 확률이 다르므로 중복조합을 이용하면 안된다.

[제 2 분야, 문제 4 번]

흰 공 r개와 검은 공 s개가 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 흰 공이면 다시 주머니에 넣고, 검은 공이면 흰 공으로 바꾸어 넣는 시행을 n번 반복한 후 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 그 공이 흰 공일 확률을 구하여라.

[풀 이] k번 째에 흰 공을 뽑을 확률을 P_k라 하자.

주머니 속의 공의 개수는 항상 $r+s$이므로 k번 째로 공을 뽑을 때 주머니 속의 흰 공의 개수는 $(r+s)P_k$이다. 이제 P_{k+1}을 구해보자.

k번 째에서 흰공을 뽑으면 $k+1$번 째로 공을 뽑을 때 주머니 속의 흰 공의 개수는 $(r+s)P_k$로 불변이다.

k번 째 에서 검은 공을 뽑으면 $k+1$번 째로 흰 공을 뽑을 때 주머니 속의 흰 공의 개수는 하나 증가하여 $(r+s)P_k+1$이 된다. 따라서

$$\begin{aligned}P_{k+1} &= P_k\frac{(r+s)P_k}{r+s}+(1-P_k)\frac{(r+s)P_k+1}{r+s}\\ &= \left(1-\frac{1}{r+s}\right)P_k+\frac{1}{r+s}.\end{aligned}$$

양변에서 1을 빼면

$$P_{k+1}-1=\left(1-\frac{1}{r+s}\right)P_k+\frac{1}{r+s}-1=\left(1-\frac{1}{r+s}\right)(P_k-1)\ .$$

따라서

$$P_k-1=(P_1-1)\left(1-\frac{1}{r+s}\right)^{k-1}$$

$P_1=\dfrac{r}{r+s}$을 대입하고 정리하면

$$P_k=1-\frac{s}{r+s}\left(1-\frac{1}{r+s}\right)^{k-1}.$$

그러므로 구하는 $n+1$번 째에 흰 공을 뽑을 확률은

$$P_{n+1} = 1 - \frac{s}{r+s}\left(1 - \frac{1}{r+s}\right)^n.$$

[문제 5 번]

방정식

$$x^4 - 2y^2 = 1$$

을 만족시키는 정수해 (x, y) 를 모두 구하여라.

[풀 이] $x^4 - 1 = 2y^2$이므로 x는 홀수이다. $x = 2k+1$ (k : 정수)라 놓고 이를 원 식에 대입하면

$$\begin{aligned} 2y^2 &= \{(2k+1)^2\}^2 - 1 = \{(2k+1)^2 - 1\}\{(2k+1)^2 + 1\} \\ &= (4k^2 + 4k)(4k^2 + 4k + 2) \end{aligned}$$

따라서

$$k(k+1)(2k(k+1)+1) = \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \text{제곱수}.$$

그런데 $(k, k+1) = 1$, $(k, 2k(k+1)+1) = 1$, $(k+1, 2k(k+1)+1) = 1$ 이므로, $2k(k+1)+1 > 0$ 은 제곱수이며, k 도 $\pm$ 제곱수이고 $k+1$ 도 $\pm$ 제곱수이다. 단, k와 $k+1$은 같은 부호를 가져야한다.

(i) $k = s^2,\ k+1 = s^2 + 1 = t^2$ $(0 \le s < t)$ 인경우

$t^2 - s^2 = 1 = (t-s)(t+s),\ s < t$이므로

$$t - s = 1, \quad t + s = 1$$

따라서 $t = 1,\ k = 0$. 그러므로 $x = 1,\ y = 0$

(ii) $k+1 = -s^2, k = -s^2 - 1 = -t^2$ $(0 \le s < t)$ 인 경우 $t^2 - s^2 = 1 = (t-s)(t+s),\ s < t$이므로

$$t - s = 1, \quad t + s = 1$$

따라서 $t = 1,\ k = -1$. 그러므로 $x = -1,\ y = 0$

[별 해] $x^4 - 1 = 2y^2$ 으로 놓으면 x는 홀수임을 알 수 있다.

따라서 $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$에서 (x^2-1)은 4의 배수이고 (x^2+1)은 2의 배수이다. 식을 변형하면

$$\frac{x^2-1}{4}\frac{x^2+1}{2} = \frac{y^2}{4} = \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

한편

$$\frac{x^2+1}{2} - \frac{x^2-1}{2} = 1$$

따라서 $\frac{x^2+1}{2}$와 $\frac{x^2-1}{2}$의 공약수는 ± 1 뿐이다. 그러므로 $\frac{x^2-1}{4}$와 $\frac{x^2+1}{2}$의 공약수도 ± 1뿐이다.

그런데 $\frac{x^2+1}{2}$와 $\frac{x^2-1}{2}$의 곱이 제곱수이므로 각각은 제곱수이어야 한다.

특히 $\frac{x^2-1}{4}$이 제곱수이므로 $\frac{x^2-1}{4} = t^2$ 이라 놓으면

$$(2t)^2 < x^2 = 4t^2 + 1 = (2t)^2 + 1 \le (2t+1)^2$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$x^2 = (2t+1)^2$$

여기서 $(2t)^2 + 1 = x^2 = (2t+1)^2$이므로

$$t = 0 \quad x = \pm 1.$$

그러므로 $y = 0$. 따라서

$$(x, y) = (1, 0), \quad (x, y) = (-1, 0).$$

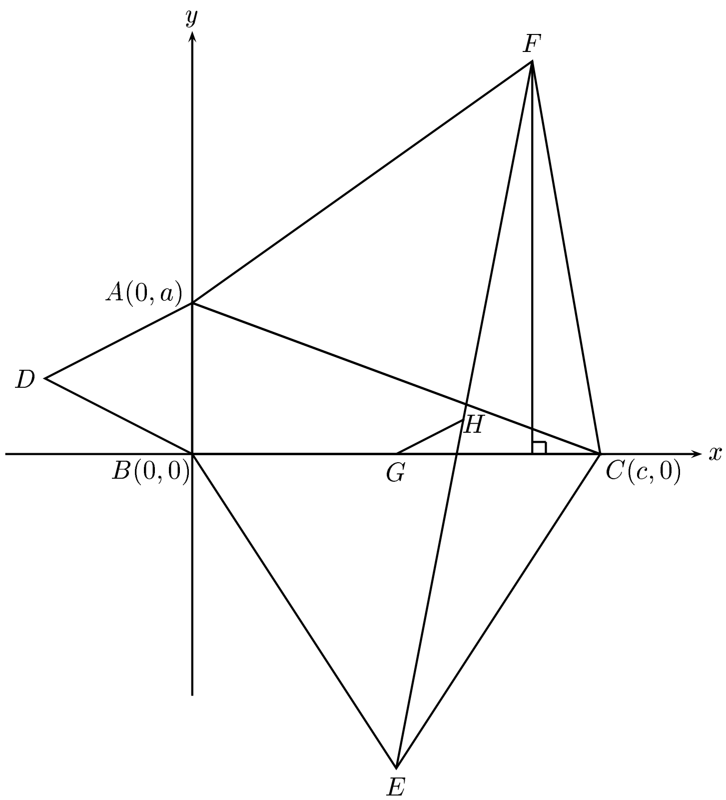
[문제 6 번]

각 B 를 직각으로 하는 임의의 직각삼각형 ABC 의 외부에 변 AB, BC, CA 를 각각 한 변으로 하는 세 개의 정삼각형 ADB, BEC, CFA 가 있다. 변 BC 의 중점을 G , 선분 EF 의 중점을 H 라 할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) 직선 GH 와 직선 DA 는 평행함을 보여라.

(2) $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{DA}}$ 의 값을 구하여라.

[풀 이]



위의 그림에서 보는 바와 같이 $A = (0, a)$, $B = (0, 0)$, $C = (c, 0)$라 하면

$$D = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{1}{2}a\right),\ E = \left(\frac{c}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$$

점 $F(x, y)$의 좌표를 구하자.

[**방법 1**] $\overline{AC}$의 중점은 $M(\frac{c}{2}, \frac{a}{2})$이다.

$\overleftrightarrow{AC}$의 기울기는 $-\frac{a}{c}$이고 $\overleftrightarrow{FM} \perp \overleftrightarrow{AC}$ 이므로 $\overleftrightarrow{FM}$의 기울기는 $\frac{c}{a}$이다. 따라서

$$\frac{(y-\frac{a}{2})}{(x-\frac{c}{2})} = \frac{c}{a}$$

$\overline{FM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC}$이므로

$$\sqrt{(x-\frac{c}{2})^2 + (y-\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+c^2}$$

위의 두 식에서

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{(x-\frac{c}{2})^2 + \frac{c^2}{a^2}(x-\frac{c}{2})^2} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}(x-\frac{c}{2})$$

그러므로

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{c}{2}, \quad y = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

[**방법 2**] 그림에서

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+C\right) = \frac{c-x}{b}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}+C\right) = \frac{y}{b}$$

덧셈정리를 이용하여 정리하면,

$$\frac{c}{2b} - \frac{\sqrt{3}a}{2b} = \frac{c-x}{b}, \quad \frac{\sqrt{3}c}{2b} + \frac{a}{2b} = \frac{y}{b}$$

따라서

$$x = \frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{1}{2}a$$

위에서 구한 F의 좌표를 이용하면

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{1}{2}c,\ 0\right), \\ H &= \left(\frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \frac{1}{4}a\right) \end{aligned}$$

그러므로

$$\text{직선 } GH \text{ 의 기울기} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{ 직선 } DA \text{ 의 기울기}$$

그리고

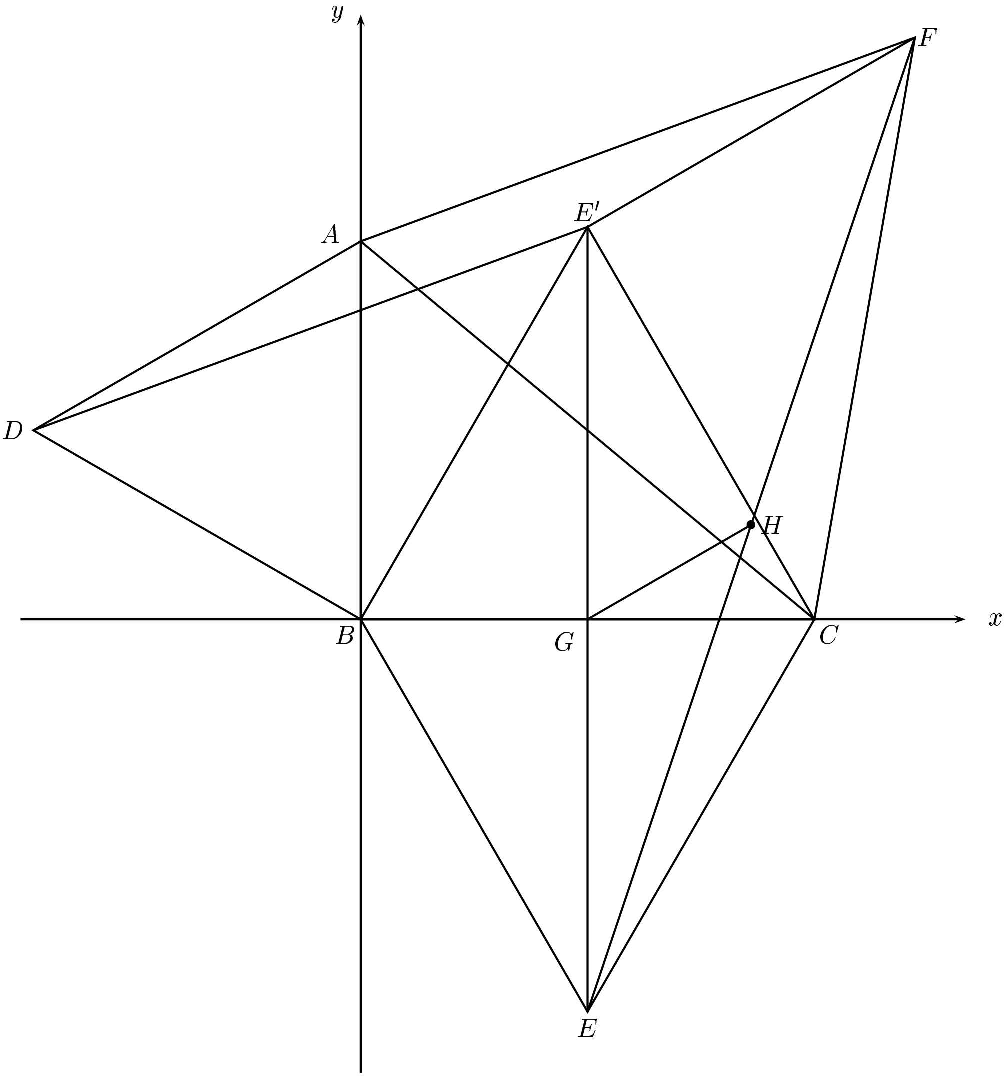
$$\overline{GH} = \frac{a}{2}, \quad \overline{DA} = a$$

따라서

$$\text{직선 } GH \ //\text{직선 } DA,$$

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{DA}} = \frac{1}{2}$$

[**별 해**] 다음 그림과 같이 x축에 대한 E의 대칭점을 E'이라하면



$$\overline{DB} = \overline{AB}, \quad \angle DBE' = 60^\circ + \angle ABE' = \angle ABC, \quad \overline{BE'} = \overline{BC}$$

따라서

$$\triangle DBE' \equiv \triangle ABC. \tag{6}$$

한편

$$\overline{AC} = \overline{FC}, \quad \angle ACB = 60^\circ - \angle ACE' = \angle FCA - \angle ACE' = \angle FCE', \quad \overline{BC} = \overline{E'C}$$

따라서

$$\triangle ABC \equiv \triangle FE'C. \tag{7}$$

식 (6), (7)에 의하여

$$\triangle DBE' \equiv \triangle FE'C.$$

따라서 사각형 $ADE'F$는 평행사변형이다. 그러므로

$$\overline{AD} = \overline{FE'}, \quad \overline{AD} // \overline{FE'} \tag{8}$$

그리고 G는 $\overline{EE'}$의 중점, H는 $\overline{EF}$의 중점이므로

$$\overline{E'F}//\overline{GH}, \quad \overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{E'F} \tag{9}$$

그러므로 식 (8), (9)에 의하여

$$\overline{AD}//\overline{GH}, \quad \overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{AD}$$

[제 1 분야, 문제 7 번]

$A^3 = A$를 만족시키는 임의의 이차 정사각행렬 A에 대하여, 행렬 $wE - A$의 역행렬이 존재할 실수 w에 대한 조건과 그 역행렬을 구하여라. (단, E는 단위행렬이고 A는 영행렬도 $\pm E$도 아니다.)

[풀 이] $wE - A$의 역행렬을 B라 하자.

$$-A = -A^3 = ((wE - A) - wE)^3 = (wE - A)^3 - 3w(wE - A)^2 + 3w^2(wE - A) - w^3E$$

양변의 우측에 B를 곱하면

$$\begin{aligned} -AB &= (wE - A)^2 - 3w(wE - A) + 3w^2E - w^3B \\ &= A^2 + wA + w^2E - w^3B\ . \end{aligned}$$

그런데 $E = (wE - A)B = wB - AB$에서 $-AB = E - wB$이므로

$$E - wB = A^2 + wA + w^2E - w^3B$$

그러므로

$$(w^3 - w)B = A^2 + wA + (w^2 - 1)E$$

따라서 $w \neq 0, \pm 1$일 때

$$B = \frac{1}{w(w^2 - 1)}A^2 + \frac{1}{w^2 - 1}A + \frac{1}{w}E$$

[별 해] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$$wE - A = \begin{pmatrix} w - a & -b \\ -c & w - d \end{pmatrix}$$

따라서

$$(wE - A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} w - d & b \\ c & w - a \end{pmatrix}, \quad \text{단, } \alpha = w^2 - (a + d)w + ad - bc.$$

$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$이므로

$$A^2 = (a + d)A - (ad - bc)E \tag{10}$$

양변에 A를 곱하면

$$A = A^3 = (a + d)A^2 - (ad - bc)A \tag{11}$$

식 (10)와 식 (11)에서

$$\begin{aligned} A &= (a+d)\{(a+d)A-(ad-bc)E\}-(ad-bc)A \\ &= (a+d)^2A-(a+d)(ad-bc)E-(ad-bc)A \end{aligned}$$

그러므로

$$(a+d)(ad-bc)E=\{(a+d)^2-(ad-bc)-1\}A=(a^2+ad+d^2+bc-1)A \tag{12}$$

$a^2+ad+d^2+bc-1=0$임을 보이자.

$a^2+ad+d^2+bc-1\neq 0$라 가정하면 식 (12)의 양변의 $(1,2),(2,1)$-성분에서

$$b=c=0$$

따라서 식 (12)에서 다음을 얻는다.

$$(a+d)adE=(a^2+ad+d^2-1)A \tag{13}$$

$A\neq O$이므로 $(a+d)ad\neq 0$.

식 (13)의 양변의 $(1,1),(2,2)$-성분을 비교하면

$$(a+d)ad \;=\; (a^2+ad+d^2-1)a=(a^2+ad+d^2-1)d \tag{14}$$

식 (14)를 연립하여 풀면 $a=d=\pm 1$. 여기서 $A=\pm E$가 되어 가정에 모순.

그러므로

$$a^2+ad+d^2+bc-1=0.$$

따라서 식 (12)에서

$$(a+d)(ad-bc)=0$$

(i) $a+d=0$일 때

다음이 성립한다.

$$0=a^2+ad+d^2+bc-1=(a+d)^2-ad+bc-1=-ad+bc-1$$

따라서 $ad-bc=-1$. 즉 $\alpha=w^2-1$. 그러므로 $w\neq\pm1$일 때

$$(wE-A)^{-1}=\frac{1}{w^2-1}\begin{pmatrix} w+a & 0 \\ 0 & w-a \end{pmatrix}$$

(ii) $ad-bc=0$일 때

다음이 성립한다.

$$0 \;=\; a^2+ad+d^2+bc-1=a^2+2ad+d^2-1=(a+d)^2-1$$

$a+d=\pm1$이므로 $\alpha=w^2\pm w$. 따라서 $w\neq 0,\pm1$일 때

$$(wE-A)^{-1}=\frac{1}{w^2\pm w}\begin{pmatrix} w-d & b \\ c & w-a \end{pmatrix}$$

[제 2 분야, 문제 7 번]

$A^4 = A^2$ 을 만족시키는 임의의 이차 정사각행렬 A 에 대하여, 행렬 $wE - A$ 의 역행렬이 존재할 실수 w 에 대한 조건과 그 역행렬을 구하여라. (단, E 는 단위행렬이고 A 는 영행렬도 $\pm E$ 도 아니다.)

[풀 이] $wE - A$의 역행렬을 B라 하자.

$$A^2 = A^4 = (wE - A)^4 - 4w(wE - A)^3 + 6w^2(wE - A)^2 - 4w^3(wE - A) + w^4E$$

양변의 우측에 B를 곱하면

$$\begin{aligned} A^2B &= (wE - A)^3 - 4w(wE - A)^2 + 6w^2(wE - A) - 4w^3E + w^4B \\ &= -A^3 - wA^2 - w^2A - w^3E + w^4B \qquad (15) \end{aligned}$$

한편 $A^2 = (wE - A)^2 - 2w(wE - A) + w^2E$의 양변의 우측에 B를 곱하면

$$A^2B = wE - A - 2wE + w^2B. \qquad (16)$$

식 (15), (16)에서

$$wE - A - 2wE + w^2B = -A^3 - wA^2 - w^2A - w^3E + w^4B$$

그러므로

$$(w^4 - w^2)B = A^3 + wA^2 + (w^2 - 1)A + (w^3 - w)E$$

따라서 $w \neq 0, \pm 1$일 때

$$B = \frac{1}{w^2(w^2 - 1)}A^3 + \frac{1}{w(w^2 - 1)}A^2 + \frac{1}{w^2}A + \frac{1}{w}E$$