충남대학교 주최

제 3 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. **[13 점]** 3차 다항식 $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_3 \neq 0)$의 계수 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$는 공차가 0이 아닌 등차수열을 이룬다. 이 때, 방정식 $P(x) = 0$의 근을 $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$(이)라 할 때,

$$R = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} + \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_3} + \frac{1}{\gamma_3 + \gamma_1}$$

의 최대값을 구하여라.

2. **[13 점]** 모든 정수 n에 대하여

$$\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{34n}{105}$$

이 정수임을 보여라.

3. **[13 점]** 상자 안에 1이 적힌 공이 한 개, 2가 적힌 공이 두 개, $\cdots$, N이 적힌 공이 N개 들어있다. 이 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후, 앞면이 나올 확률이 p인 동전 하나를 공에 적힌 숫자의 횟수 만큼 던진다. 확률변수 X를 동전의 앞면이 나오는 횟수라 할 때, X의 기대값을 구하여라.

4. **[13 점]** 좌표평면 위의 한 점 $P(0,\ \theta)$를 고정하자. 점 A와 B는 $\angle APB = \theta$를 만족시키는 x축 위의 임의의 두 점이고 점 M은 x축 위의 점으로서 선분 $\overline{PM}$은 $\angle APB$를 이등분한다. 세 점 $A,\ B,\ P$를 지나는 원의 중심을 C라 하자. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$)

(1) 두 점 C와 M을 지나는 직선은 항상 y축 위의 한 고정점을 지남을 보여라.

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$일 때, 그 고정점의 좌표를 구하여라.

충남대학교 주최

제 3 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (2차시험)

[**주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.**]

1. [**16 점**] 모든 정수 k에 대하여 방정식

$$x^{1999} - x^{1997} + x^2 - 5kx + 5k - 2 = 0$$

은 정수해를 갖지 않음을 보여라.

2. [**16 점**] 함수 f가 주어져서 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - \{f(x)\}^2}$$

을 만족시키는 0이 아닌 실수 a가 존재하면, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+b) = f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 b가 존재함을 보여라.

3. [**16 점**] 삼각형 ABC의 외부에 삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 개의 정사각형 $ABDE$, $ACFG$, $BCHI$를 만들 때 여섯 개의 꼭지점 D, E, F, G, H, I를 지나는 원이 존재하기 위한 필요충분조건을 구하여라.

충남대학교 주최

제 3 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [**13 점**] 3차 다항식 $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_3 \neq 0)$의 계수 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$는 공차가 0이 아닌 등차수열을 이룬다. 이 때, 방정식 $P(x) = 0$의 근을 $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$(이)라 할 때,

$$R = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} + \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_3} + \frac{1}{\gamma_3 + \gamma_1}$$

의 최대값을 구하여라.

2. [**13 점**] 집합 $F = \{\theta,\ e,\ \omega\}$가 두 연산 $*$와 $\circ$에 대하여 닫혀있고 결합법칙이 성립한다. θ와 e는 각각 연산 $*$와 $\circ$에 대한 항등원이고, 각 연산에 대하여 e와 ω의 역원이 각각 F에 존재한다. 임의의 원소 $a,\ b,\ c \in F$에 대하여 $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$가 성립할 때, $\omega \circ \omega = \omega * \omega$임을 보여라.

3. [**13 점**] A와 B가 같은 경기를 되풀이하여 먼저 두 번 이기면 우승한다. 한 번의 경기에서 A가 이길 확률이 p, B가 이길 확률이 q, 비길 확률이 r이다. 단, $0 < p,\ q,\ r < 1$.
$n+1$ 번째 경기 이전에 A가 우승할 확률을 P_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} P_n$을 구하여라.
(참조 : $0 < \alpha < 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} n^k\alpha^n = 0$)

4. [**13 점**] 좌표평면 위의 한 점 $P(0,\ \theta)$를 고정하자. 점 A와 B는 $\angle APB = \theta$를 만족시키는 x축 위의 임의의 두 점이고 점 M은 x축 위의 점으로서 선분 $\overline{PM}$은 $\angle APB$를 이등분한다. 세 점 $A,\ B,\ P$를 지나는 원의 중심을 C라 하자. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

(1) 두 점 C와 M을 지나는 직선은 항상 y축 위의 한 고정점을 지남을 보여라.

(2) $\cos\theta = \frac{1}{3}$일 때, 그 고정점의 좌표를 구하여라.

충남대학교 주최

제 3 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (2차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [**16 점**] 모든 정수 k에 대하여 방정식

$$x^{1999} - x^{1997} + x^2 - 5kx + 5k - 2 = 0$$

은 정수해를 갖지 않음을 보여라.

2. [**16 점**] 어떤 볼록 k다각형 A_0의 각 변의 길이를 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$라 하자. 이 k다각형 A_0의 각 변을 제외한 나머지 변의 길이의 평균을 각 변으로 하는 새로운 볼록 k다각형을 A_1이라 하자.

예를 들어 삼각형의 경우, A_0의 세 변의 길이를 a, b, c라 하면 , A_1은 세 변의 길이가 $\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{b+c}{2}, \dfrac{a+c}{2}$인 삼각형이다.

같은 방법으로 만들어진 볼록 k 다각형 A_i로부터 각 변을 제외한 나머지 변의 길이의 평균을 각 변으로 하는 새로운 볼록 k 다각형 A_{i+1}을 만들 때, n 번째 만들어진 볼록 k 다각형 A_n의 변의 길이를 각각 $b_1(n),\ b_2(n),\ \cdots,\ b_k(n)$이라 할 때, 각 j $(1 \le j \le k)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} b_j(n)$을 구하여라.

3. [**16 점**] 삼각형 ABC의 외부에 삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 세 개의 정사각형 $ABDE$, $ACFG$, $BCHI$를 만들 때 여섯 개의 꼭지점 D, E, F, G, H, I를 지나는 원이 존재하기 위한 필요충분조건을 구하여라.