충남대학교 주최

제 2 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [**13 점**] $f_0(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ 이고, $n \geqq 1$ 일 때 $f_n(x) = (f_{n-1}(x))^2 - 2$ 이면 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{f_n(x)}{f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)} < f_1(x) \quad (n \geqq 2,\ x \geqq 0).$$

2. [**13 점**] 어떤 정수 m, n 에 대하여 $m + ni = (1+i)^3(e+fi)$ 인 정수 e, f 는 존재하고 $m + ni = (1+i)^4(g+hi)$ 인 정수 g, h 는 존재하지 않을 때,

$$m + ni = (a+bi)^2 + (c+di)^2$$

을 만족하는 정수 a, b, c, d 가 존재하지 않음을 증명하여라. (단, $i^2 = -1$)

3. [**13 점**] $\triangle ABC$에서 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ 라 하자. $a < b < c$, $2a < c$ 이면 $\triangle ABC$ 의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분하는 직선이 오직 하나 존재함을 증명하여라.

4. [**13 점**] 철수와 영희가 1 에서 6 까지의 눈이 나타날 확률이 같은 주사위를 하나씩 가지고 던진다. 철수는 1 또는 2 의 눈이 나타날 때까지 던지고, 영희는 4, 5, 6 의 눈 중 하나가 나타날 때까지 던진다. 주사위 던진 회수를 비교하여,

(1) 철수가 던진 회수가 1 회이거나

(2) 두 사람이 던진 회수가 모두 2 회 이상이고, 철수가 던진 회수가 영희가 던진 회수보다 3 회 이상 많지 않을 때

철수가 이기는 것으로 한다. 철수가 이길 확률을 구하여라.

충남대학교 주최

제 2 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (2차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [**16 점**] 어떤 실수 a, b에 대하여 함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x,y) = (ax + by,\ bx + ay).$$

함수 f를 n번 합성한 함수를 f^n 으로 표시할 때 (즉, $f^n = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n\text{ 개}}$),

함수 $f^{2^{1998}}$ 이 항등함수가 되도록하는 순서쌍 (a, b)를 모두 구하여라.

2. [**16 점**] 평면위의 점 $P(3,4)$에서의 거리가 각각 $1, 2, 3, 4$인 네 점을 꼭지점으로 하는 사각형의 최대면적을 구하여라.

3. [**16 점**] $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ 라 하자. 임의의 자연수 n에 대하여 집합 B의 원소 (x,y)가 $\sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{1}{k}$ 을 만족하면

$$\frac{x^a y^b}{x^{2c} + y^{2d}} < \frac{1}{n}$$

이 성립하는 자연수 k가 존재할 필요충분조건을 자연수 a, b, c, d의 관계식으로 나타내어라.

충남대학교 주최

제 2 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [**13 점**] $f_0(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ 이고, $n \geqq 1$ 일 때 $f_n(x) = (f_{n-1}(x))^2 - 2$ 이면 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{f_n(x)}{f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)} < f_1(x) \quad (n \geqq 2,\ x \geqq 0).$$

2. [**13 점**] 어떤 정수 m, n 에 대하여 $m + ni = (1+i)^3(e+fi)$ 인 정수 e, f 는 존재하고 $m + ni = (1+i)^4(g+hi)$ 인 정수 g, h 는 존재하지 않을 때,

$$m + ni = (a+bi)^2 + (c+di)^2$$

을 만족하는 정수 a, b, c, d 가 존재하지 않음을 증명하여라. (단, $i^2 = -1$)

3. [**13 점**] $\triangle ABC$에서 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ 라 하자. $a < b < c$, $2a < c$ 이면 $\triangle ABC$ 의 면적과 둘레의 길이를 동시에 이등분하는 직선이 오직 하나 존재함을 증명하여라.

4. [**13 점**] 앞면이 나올 확률이 p $(0 < p < 1)$ 인 동전을 n 회 던질 때, 앞면이 나온 회수가 4의 배수가 될 확률을 a_n 이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 은 p 의 값에 관계없이 일정함을 증명하여라.

충남대학교 주최

제 2 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (2차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. **[16 점]** 어떤 실수 a, b에 대하여 함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x, y) = (ax + by,\ bx + ay).$$

함수 f를 n번 합성한 함수를 f^n 으로 표시할 때 (즉, $f^n = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n\text{ 개}}$),

함수 $f^{2^{1998}}$ 이 항등함수가 되도록하는 순서쌍 (a, b)를 모두 구하여라.

2. **[16 점]** 평면위의 점 $P(3, 4)$에서의 거리가 각각 $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$인 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 최대면적을 구하시오.

3. **[16 점]** $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$라 하자. 임의의 자연수 n에 대하여 집합 B의 원소 (x, y)가 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \dfrac{1}{k}$ 이면

$$\frac{x^a y^b z^c}{x^{3d} + y^{3e} + z^{3f}} < \frac{1}{n}$$

이 성립하는 자연수 k가 존재할 필요충분조건을 자연수 a, b, c, d, e, f 의 관계식으로 나타내어라.