충남대학교 주최

제 1 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [**13 점**] 방정식 $x^n = 1$ 의 허근을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$ 이라 할 때, $(\alpha_1 + 2)(\alpha_2 + 2)\cdots(\alpha_{n-1} + 2)$ 의 값을 구하여라. (단, n 은 3 이상인 홀수)

2. [**13 점**] $a_1,\ \cdots,\ a_n$ 이 양수일 때 다음 부등식을 증명하여라. (단, $n \geqq 2$)

$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{a_1} + \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_n}{a_2} + \cdots + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{a_n} \geqq n(n-1).$$

3. [**13 점**] x, y 가 $5n+2$ 이하의 자연수일 때, $3x^2 + 2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 순서쌍 (x, y) 는 모두 몇가지 인가 ? (단, n 은 자연수)

4. [**13 점**] 일의 자리수가 6 인 11진법의 양의 수 A 가 있다. 수 A 의 가장 높은 자리의 수를 일의 자리로 옮기고, 나머지 각 자리의 수를 왼쪽으로 순차적으로 옮겨서 새로운 11진법의 수 B 를 만든다. (예 : $A = abc6 \quad \Longrightarrow \quad B = bc6a$)

이 때, 1보다 큰 어떤 자연수 n 에 대하여 다음 방정식

$$(A - B) \times 4 = A \times n$$

을 만족하는 4 자리 이상의 11진법의 수 A 를 가장 작은 수 부터 차례로 2개만 찾아라.

충남대학교 주최

제 1 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (2차시험)

[**주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.**]

1. [**15 점**] n 이 5 이상의 자연수일 때, $\dfrac{10^{2^{(n-5)}}+1}{10^{2^n}+3}$ 이 기약분수임을 보여라.

2. [**15 점**] 자연수 전체의 집합을 $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$에서 $\mathbb{N}$으로 가는 모든 함수들의 집합을 S 라 하자. 임의의 서로 다른 두 함수 $f, g \in S$ 에 대하여

$$d(f,g) = \frac{1}{m+1}$$

로 정의한다. 단, $m = \min\{x \in \mathbb{N} \,|\, f(x) \neq g(x)\}$. 또, 임의의 함수 $f \in S$ 와 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f_n \in S$ 를

$$f_n(x) = f([\sqrt[n]{x}\,]),\ x \in \mathbb{N}$$

로 정의하자. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지않은 최대의 정수)

이 때, 두 함수 $f(x) = x^3 + 11x,\ g(x) = 6x^2 + 6$ 에 대하여

$$d(f_n, g_n) < \frac{1}{2^{1997}+1}$$

을 만족하는 자연수 n 의 범위를 구하여라.

3. [**18 점**] 평면 위의 세 점 $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(a,b)$가 있다. 주어진 세 점 A, B, C 에서 이 평면 위의 임의의 직선 l 까지의 거리의 합을 $d(l)$ 이라 할 때, $d(l)$ 의 최소값을 구하여라. (단, a, b 는 서로 다른 실수)

충남대학교 주최

제 1 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. **[13 점]** 방정식 $x^n = 1$ 의 허근을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\ ,\ \alpha_{n-1}$ 이라 할 때,

$(\alpha_1 + 2)(\alpha_2 + 2)\cdots(\alpha_{n-1} + 2)$ 의 값을 구하여라. (단, n 은 3 이상인 홀수)

2. **[13 점]** $a_1,\ \cdots\ ,\ a_n$ 이 양수일 때 다음 부등식을 증명하여라. (단, $n \geqq 2$)

$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{a_1} + \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_n}{a_2} + \cdots + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{a_n} \geqq n(n-1).$$

3. **[13 점]** x, y 가 $5n+2$ 이하의 자연수일 때, $3x^2 + 2y^2$ 이 5 의 배수가 되는 순서쌍 (x, y) 는 모두 몇가지 인가 ? (단, n 은 자연수)

4. **[13 점]** 일의 자리수가 6 인 11진법의 양의 수 A 가 있다. 수 A 의 가장 높은 자리의 수를 일의 자리로 옮기고, 나머지 각 자리의 수를 왼쪽으로 순차적으로 옮겨서 새로운 11진법의 수 B 를 만든다. (예 : $A = abc6 \quad \Longrightarrow \quad B = bc6a$)

이 때, 1보다 큰 어떤 자연수 n 에 대하여 다음 방정식

$$(A - B) \times 4 = A \times n$$

을 만족하는 4 자리 이상의 11진법의 수 A 를 가장 작은 수 부터 차례로 2개만 찾아라.

충남대학교 주최
제 1 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (2차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. **[15 점]** n 이 5 이상의 자연수일 때, $\dfrac{10^{2^{(n-5)}}+1}{10^{2^n}+3}$ 이 기약분수임을 보여라.

2. **[15 점]** 자연수 전체의 집합을 $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ 에서 $\mathbb{N}$ 으로 가는 모든 함수들의 집합을 S 라 하자. 임의의 서로 다른 두 함수 $f, g \in S$ 에 대하여

$$d(f,g) = \frac{1}{m+1}$$

로 정의한다. 단, $m = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq g(x)\}$. 또, 임의의 함수 $f \in S$ 와 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $f_n \in S$ 를

$$f_n(x) = f([\sqrt[n]{x}\,]),\ x \in \mathbb{N}$$

로 정의하자. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지않은 최대의 정수)
이 때, 두 함수 $f(x) = x^3 + 11x,\ g(x) = 6x^2 + 6$ 에 대하여

$$d(f_n, g_n) < \frac{1}{2^{1997}+1}$$

을 만족하는 자연수 n 의 범위를 구하여라.

3. **[18 점]** 평면위에 중심이 원점이고 반지름이 1 인 원 S 가 있다. 두 점 $A(0,1),\ B(-1,0)$ 가 주어졌을 때, $\angle BAC = \frac{5}{9}\pi$ 가 되는 점 C 를 원 S 위에 잡는다. S 위의 점 $K(a,b)$ 가 $a \geqq 0,\ b < 0$ 를 만족하는 점일 때 $\overline{AK}$ 와 $\overline{BC}$ 가 만나는 점을 D 라 하자. 점 D 에서 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 각각 $E,\ F$ 라 할 때, $\triangle ABC$ 와 $\square AEKF$ 의 면적이 같게 되는 점 K 의 좌표를 구하시오. (단, $\tan\frac{\pi}{36} = p$)