충남대학교 주최

# 제 6 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

## 제 1 분야 (1차시험)

**[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]**

**1.** [**13점**] 임의의 복소수 $z$에 대하여

$$\frac{1}{4z(1-z)} \in (0,1]$$

일 필요충분조건은 $z$의 실수부분이 $\frac{1}{2}$임을 증명하시오.

**2.** [**13점**] 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f$, $g$가 모든 양수 $x$, $y$에 대하여 다음을 만족한다.

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad g(xy) = g(x) + g(y)$$

이 때 어떤 양수 $a$에 대하여 $g(a) = 1$이면 모든 양수 $x$에 대하여

$$f(x) = f(a)g(x)$$

가 성립함을 증명하시오.

**3.** [**13점**] 예각삼각형 $ABC$에서 $\angle A$의 이등분선이 $BC$와 만나는 점을 $D$라 하자. 점 $D$를 지나고 $BC$에 수직인 직선이 선분 $AD$의 수직이등분선과 만나는 점을 $E$라 하고 직선 $AE$가 $\triangle ABC$의 외접원과 만나는 점을 $F$라 하자. $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\sin C = d$라 할 때 $\overline{AF}$를 $a, b, c, d$로 나타내시오.

**4.** [**13점**] 점 $P$가 좌표평면의 원점에 있다. 앞면이 나올 확률이 $p$인 동전을 던져서 앞면이 나오면 점 $P$를 $x$축의 양의 방향으로 1만큼 움직이고, 뒷면이 나오면 $y$축의 양의 방향으로 1만큼 움직이는 실험을 점 $P$의 $x$ 좌표가 10이 되거나 또는 $y$ 좌표가 10이 될 때까지 계속한다.

(a) 실험이 끝났을 때 점 $P$의 좌표가 $(10, 7)$이 될 확률을 구하시오.

(b) 실험이 끝났을 때 점 $P$의 $x$ 좌표와 $y$ 좌표의 합 $Z$의 확률분포를 구하시오.

충남대학교 주최

# 제 6 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

## 제 1 분야 (2차시험)

[**주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.**]

**5.** [**16점**] 방정식 $y^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5$ 의 정수해 $(x, y)$를 모두 구하시오.

**6.** [**16점**] 임의의 실수 $x \in [0,1]$를 다음과 같이 무한합으로 표현할 수 있다.

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \frac{x_5}{2^5} + \cdots, \quad x_i \in \{0,1\}$$

그러나 $\frac{q}{2^n}$ $(0 \leq q < 2^n,\ q$ 는 정수$)$ 꼴의 실수는 유한합으로도 표현되며 이 경우에는 유한합의 표현을 사용하기로 한다. 예를 들면 $\frac{1}{2}$을 $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$ 로 표현할 수도 있지만 $x = \frac{1}{2}$ 로 나타내기로 한다. 이 때 이러한 표현을 사용하여 함수 $f : [0,1] \to [0,1]$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \frac{x_4}{10^4}$$

적분값 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$을 구하시오.

(단, $g(x) = \begin{cases} c, & x \in [a,b) \\ d, & x = b \end{cases}$ 이면 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = c(b-a)$ 로 약속한다.)

**7.** [**16점**] 세변의 길이가 각각 $a,\ b,\ c$ 인 예각삼각형 $ABC$ 의 각 변에서 꼭지점이 아닌 점을 하나씩 잡아서 만든 삼각형의 둘레의 최소값을 $a, b, c, S$ 로 나타내시오. 단, $S$ 는 $\triangle ABC$ 의 면적이다.

충남대학교 주최

# 제 6 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

### 제 2 분야 (1차시험)

**[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]**

**1.** [**13점**] 임의의 복소수 $z$에 대하여

$$\frac{1}{4z(1-z)} \in (0,1]$$

일 필요충분조건은 $z$의 실수부분이 $\frac{1}{2}$임을 증명하시오.

**2.** [**13점**] 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f$, $g$가 모든 양수 $x$, $y$에 대하여 다음을 만족한다.

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad g(xy) = g(x) + g(y)$$

이 때 어떤 양수 $a$에 대하여 $g(a) = 1$이면 모든 양수 $x$에 대하여

$$f(x) = f(a)g(x)$$

가 성립함을 증명하시오.

**3.** [**13점**] 예각삼각형 $ABC$에서 $\angle A$의 이등분선이 $BC$와 만나는 점을 $D$라 하자. 점 $D$를 지나고 $BC$에 수직인 직선이 선분 $AD$의 수직이등분선과 만나는 점을 $E$라 하고 직선 $AE$가 $\triangle ABC$의 외접원과 만나는 점을 $F$라 하자. $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\sin C = d$라 할 때 $\overline{AF}$를 $a, b, c, d$로 나타내시오.

**4.** [**13점**] 갑이 이기면 2점, 비기면 1점, 지면 0점을 얻는 게임을 계속한다. 각 게임에서 갑이 이기는 확률은 $\frac{1}{2}$, 비기는 확률은 $\frac{1}{6}$, 지는 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

(a) 갑이 3점을 얻으면 게임이 끝난다고 할 때 갑이 3점을 얻을 확률을 구하시오.

(b) 갑이 $n$점을 얻으면 게임이 끝난다고 할 때 갑이 $n(\geq 4)$점을 얻을 확률 $p_n$을 구하시오.

충남대학교 주최

# 제 6 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

### 제 2 분야 (2차시험)

[**주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.**]

**5.** [**16점**] 방정식 $y^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5$ 의 정수해 $(x, y)$를 모두 구하시오.

**6.** [**16점**] $f(0) = 0$인 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 임의의 실수 $x_i$ $(1 \le i \le 3^{2002})$에 대하여 다음 식을 만족한다. 단, $x_{3^{2002}+1} = x_1$.

$$3^{2002} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{3^{2002}}}{3^{2002}}\right) + 3 \sum_{i=1}^{3^{2001}} f\left(\frac{x_{3i-2} + x_{3i-1} + x_{3i}}{3}\right) = 2 \sum_{i=1}^{3^{2002}} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

모든 실수 $x, y$ 에 대하여 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ 가 성립함을 증명하시오.

**7.** [**16점**] 세변의 길이가 각각 $a$, $b$, $c$ 인 예각삼각형 $ABC$ 의 각 변에서 꼭지점이 아닌 점을 하나씩 잡아서 만든 삼각형의 둘레의 최소값을 $a, b, c, S$ 로 나타내시오. 단, $S$ 는 $\triangle ABC$ 의 면적이다.