충남대학교 주최

제 5 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [**13점**] 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 계수 $a,\ b$ 가 모두 홀수일 때 이 방정식의 근은 유리수가 아님을 증명하시오.

2. [**13점**] 두 함수 $f(x),\ g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 식을 만족한다.

$$f(x)^2=\tfrac{1}{2}(1-g(2x)),\qquad g(x)^2=\tfrac{1}{2}(1+g(2x)),$$

$$f(2x)=2f(x)g(x),\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{x}{2^n})}{g(\frac{x}{2^n})}=0.$$

이 때 $f(\frac{x}{2^n})\neq 0,\ g(\frac{x}{2^n})\neq 0\ (n=0,1,2,\cdots)$ 을 만족하는 x 에 대하여 다음 식이 성립함을 증명하시오.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-g(\frac{x}{2^n})}{f(\frac{x}{2^{n-1}})}=\frac{f(\frac{x}{2})}{g(\frac{x}{2})}$$

3. [**13점**] 각 면에 1, 2, 3, 4 가 각각 쓰여진 2개의 정사면체를 동시에 n 번 던진다. 정사면체의 각 눈이 나오는 확률이 $\dfrac{1}{4}$ 일 때 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$의 눈이 각각 1번 이상 나오는 확률을 구하시오.

4. [**13점**] 평면 위의 세 점 $A(0,2), B(0,0), C(4,0)$ 에 대하여

$$\angle BAP=\angle CBP=\angle ACP$$

를 만족하는 $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P는 유일함을 보이고 P 의 좌표를 구하시오.

충남대학교 주최

제 5 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (2차시험)

[**주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.**]

5. [**16점**] 다음 유리식을 다항식이 되게 하는 모든 양의 정수 k 와 l 을 구하시오.

$$\frac{(1+x^3)^k - x^l(1+x)^k}{(1-x^2)(1-x^4)}$$

6. [**16점**] 모든 실수 $x,\ y$ 에 대하여 다음 부등식

$$|p(x+y)+p(x-y)-2p(x)-2p(y)| \le \sqrt{|x|^3}+\sqrt{|y|^3}$$

을 만족하는 다항식 $p(x)$ 를 모두 구하시오.

7. [**16점**] 면적이 S 인 $\triangle ABC$ 의 세 변 $AB,\ BC,\ CA$ 위에

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}+2\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}=2$$

가 성립하도록 각각 점 $D,\ E,\ F$ 를 잡았다. $\triangle DEF$ 의 면적의 최대값을 구하시오.

충남대학교 주최

제 5 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [**13점**] 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 계수 $a,\ b$ 가 모두 홀수일 때 이 방정식의 근은 유리수가 아님을 증명하시오.

2. [**13점**] 두 함수 $f(x),\ g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 식을 만족한다.

$$f(x)^2=\tfrac{1}{2}(1-g(2x)), \qquad g(x)^2=\tfrac{1}{2}(1+g(2x)),$$
$$f(2x)=2f(x)g(x), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{x}{2^n})}{g(\frac{x}{2^n})}=0.$$

이 때 $f(\frac{x}{2^n})\neq 0,\ g(\frac{x}{2^n})\neq 0\ (n=0,1,2,\cdots)$ 을 만족하는 x 에 대하여 다음 식이 성립함을 증명하시오.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-g(\frac{x}{2^n})}{f(\frac{x}{2^{n-1}})}=\frac{f(\frac{x}{2})}{g(\frac{x}{2})}$$

3. [**13점**] 0, 1, 2 가 각각 적힌 세 개의 구슬이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 구슬을 하나 꺼내어 숫자를 확인한 후 주머니에 다시 넣는 시행을 0 이 적힌 구슬이 뽑힐 때까지 되풀이 한다. 이 때 뽑혔던 모든 구슬에 적힌 숫자의 합 S 의 기대값 $E(S)$ 를 구하시오.

4. [**13점**] 평면 위의 세 점 $A(0,2), B(0,0), C(4,0)$ 에 대하여

$$\angle BAP=\angle CBP=\angle ACP$$

를 만족하는 $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P는 유일함을 보이고 P 의 좌표를 구하시오.

충남대학교 주최

제 5 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (2차시험)

[**주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.**]

5. [**16점**] 다음 유리식을 다항식이 되게 하는 모든 양의 정수 k 와 l 을 구하시오.

$$\frac{(1+x^3)^k - x^l(1+x)^k}{(1-x^2)(1-x^4)}$$

6. [**16점**] 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 $x,\ y$ 에 대하여 다음 부등식

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq 2001$$

을 만족하며 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ 가 존재한다. 이 때 모든 실수 $x,\ y$ 에 대하여

$$|f(x) - g(x)| \leq 2001, \quad g(x+y) - g(x) - g(y) = 0$$

을 만족하는 함수 $g(x)$ 가 존재함을 증명하시오.

7. [**16점**] 면적이 S 인 $\triangle ABC$ 의 세 변 $AB,\ BC,\ CA$ 위에

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} + 2\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}} = 2$$

가 성립하도록 각각 점 $D,\ E,\ F$ 를 잡았다. $\triangle DEF$ 의 면적의 최대값을 구하시오.