

제 4 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [13점] 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 미분가능하며, 모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| \leq 1$ 이고 $f(-2) = 2$, $f(2) = -2$ 일 때 $f(1)$ 의 값을 구하여라.
2. [13점] n 이 자연수일 때, $\frac{n^2+n}{2}$ 보다 작거나 같은 모든 자연수 k 에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중 그 원소의 합이 k 가 되는 부분집합이 존재함을 증명하여라.
3. [13점] 임의의 삼각형 ABC 의 세 변위에 네 꼭지점이 있는 직사각형 중에서 그 넓이와 둘레가 각각 삼각형 ABC 의 넓이와 둘레의 $\frac{1}{2}$ 이 되는 것은 존재하지 않음을 보여라.
4. [13점] n 개의 상자에 같은 공 $2n$ 개를 임의로 넣을 때, 처음 r 개의 상자에 k 개의 공이 들어갈 확률 p_n 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 을 구하라. (단, $r < n$ 이고 $k < 2n$ 이다.)

제 4 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 1 분야 (2차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

5. [16점] 방정식

$$x^4 - 2y^2 = 1$$

을 만족시키는 정수해 (x, y) 를 모두 구하여라.

6. [16점] 각 B 를 직각으로 하는 임의의 직각삼각형 ABC 의 외부에 변 AB, BC, CA 를 각각 한 변으로 하는 세 개의 정삼각형 ADB, BEC, CFA 가 있다. 변 BC 의 중점을 G , 선분 EF 의 중점을 H 라 할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) 직선 GH 와 직선 DA 는 평행함을 보여라.

(2) $\frac{\overline{GH}}{\overline{DA}}$ 의 값을 구하여라.

7. [16점] 식 $A^3 = A$ 를 만족시키는 임의의 이차 정사각행렬 A 에 대하여, 행렬 $wE - A$ 의 역행렬이 존재할 실수 w 에 대한 조건과 그 역행렬을 구하여라. (단, E 는 단위행렬이고 A 는 영행렬도 $\pm E$ 도 아니다.)

제 4 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (1차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

1. [13점] 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 미분가능하며, 모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| \leq 1$ 이고 $f(-2) = 2$, $f(2) = -2$ 일 때 $f(1)$ 의 값을 구하여라.
2. [13점] n 이 자연수일 때, $\frac{n^2+n}{2}$ 보다 작거나 같은 모든 자연수 k 에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중 그 원소의 합이 k 가 되는 부분집합이 존재함을 증명하여라.
3. [13점] 임의의 삼각형 ABC 의 세 변위에 네 꼭지점이 있는 직사각형 중에서 그 넓이와 둘레가 각각 삼각형 ABC 의 넓이와 둘레의 $\frac{1}{2}$ 이 되는 것은 존재하지 않음을 보여라.
4. [13점] 흰 공 r 개와 검은 공 s 개가 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 흰 공이면 다시 주머니에 넣고, 검은 공이면 흰 공으로 바꾸어 넣는 시행을 n 번 반복한 후 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 그 공이 흰 공일 확률을 구하여라.

제 4 회 전국 고등학교 수학경시대회 문제지

제 2 분야 (2차시험)

[주의 : 답안지의 지정된 면에 풀이 전 과정을 쓰시오.]

5. [16점] 방정식

$$x^4 - 2y^2 = 1$$

을 만족시키는 정수해 (x, y) 를 모두 구하여라.

6. [16점] 각 B 를 직각으로 하는 임의의 직각삼각형 ABC 의 외부에 변 AB, BC, CA 를 각각 한 변으로 하는 세 개의 정삼각형 ADB, BEC, CFA 가 있다. 변 BC 의 중점을 G , 선분 EF 의 중점을 H 라 할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) 직선 GH 와 직선 DA 는 평행함을 보여라.

(2) $\frac{\overline{GH}}{\overline{DA}}$ 의 값을 구하여라.

7. [16점] 식 $A^4 = A^2$ 을 만족시키는 임의의 이차 정사각행렬 A 에 대하여, 행렬 $wE - A$ 의 역행렬이 존재할 실수 w 에 대한 조건과 그 역행렬을 구하여라. (단, E 는 단위행렬이고 A 는 영행렬도 $\pm E$ 도 아니다.)