

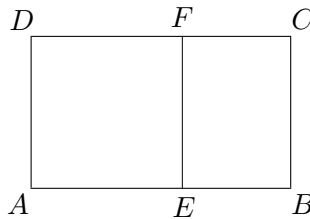
제1회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회
(중학교 3학년 문제)

1. (11점) 서기 1년에 어느 특정한 세 개의 해성이 나타났다. 그 이후 부터 서기 2001년 까지 이 세개의 해성 중 어느 것도 나타나지 않았던 년도의 수를 구하여라. 이들의 주기는 각각 13년, 17년과 23년이다.

2. (11점) 다음 식을 계산하여라.

$$(\sqrt{845} - \sqrt{125} + \sqrt{128})(\sqrt{720} - \sqrt{180} - \sqrt{72}).$$

3. (11점) 그림과 같이 직사각형 $ABCD$ 가, 짧은 변 AD 를 한 변으로 하는 정사각형 $Aefd$ 를 잘라낸 나머지 직사각형 $BCFE$ 와 닮은 꼴 일 때, 가장 아름답다고 알려져 있다. 이때, 두 변의 길이의 비 $\frac{AD}{AB} = R$ 를 황금비라고 말한다. $(2R + 1)^2$ 을 계산하여라.



4. (12점) 어떤 여섯자리의 자연수 $x7360y$ 가 $2^a \times 3^{2 \times b} \times 5^c \times 19^d$ 로 소인수분해되었다. $1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$ 의 값을 구하여라. 단, a, b, c, d 는 모두 자연수이다.

5. (12점) a 와 b 는 자연수이고 $b < 10$ 이며 등식

$$15(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = 2^a - b$$

를 만족한다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

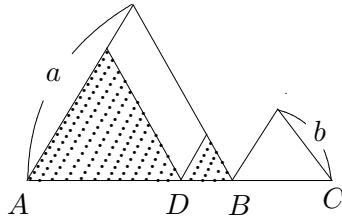
6. (12점) 15개의 문제가 출제된 수학경시대회에 5명으로 구성된 어떤 팀이 참가하였다. 이 팀의 성적을 조사하기 위하여 구성원 각자에게 정답 수를 물었더니 이들 중 세 명은 각각 8개, 11개, 4개라고 자신의 정답 수를 밝혔다. 나머지 두 명 중 학생 A 는 "우리 팀의 평균 정답 수는 8이다." 라고 대답하였고, 학생 B 는 "우리 팀 학생의 정답 수의 제곱의 평균은 86이다." 라고 대답하였다. 이때, 학생 A 와 B 의 정답 수의 곱을 구하여라.

7. (13점) 1부터 64까지의 자연수를 모두 이진법으로 표현했을 때 나타나는 1의 개수를 a , 0의 개수를 b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

8. (13점) $2^a = 12 + 8\sqrt{2}$ 이고 $2^b = 2 - \sqrt{2}$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

9. (13점) a 와 b 는 $a^2 = 256 + b^2$ 을 만족하는 양의 실수이다. 한 변의 길이가 각각 a, b 인 두 정삼각형이 그림과 같이 주어져 있다. 선분 AC 의 중점을 D 라 할 때, 선분 AD, DB 를 각각 한 변으로 하는 두 정삼각형의 넓이의 곱을 구하여라.

[도움말 : 한 변의 길이가 x 인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}x}{2}$ 임을 이용하라.]

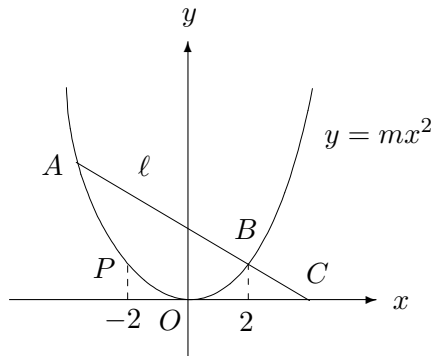


10. (14점) 방정식

$$\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-4} + \frac{2}{x-6} + \frac{1}{x-8} = 0$$

의 해를 모두 합한 값을 구하여라.

11. (14점) 그림과 같이 어떤 직선 l 과 포물선 $y = mx^2$ ($m > 0$)의 교점을 A, B 라 하고 l 과 x 축의 교점을 C 라 하자. 그리고 $\overline{AB} : \overline{BC} = 8 : 1$ 이고 B 의 x 좌표를 2라 하자. 또 P 를 x 좌표가 -2 가 되는 포물선 위의 점이라 하자. 삼각형 AOB 의 넓이가 240이라 할 때, 삼각형 APB 의 넓이를 구하여라.

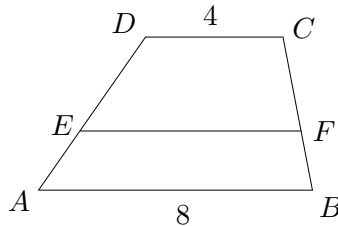


12. (15점) 포물선 $y = x^2$ 위의 두 점 P, Q 와 포물선 $y = -2x^2$ 위의 두 점 R, S 가 다음 네 조건을 만족한다.

- (i) $\overline{PQ} // \overline{RS} // x$ 축,
- (ii) $\overline{PQ} + \overline{RS} = 12$,
- (iii) P 와 S 의 x 좌표는 양수,
- (iv) 사각형 $PQRS$ 의 넓이는 144.

이때, 점 P 의 x 좌표의 값을 구하여라.

13. (15점) 아래의 그림과 같이 사다리꼴 $ABCD$ 가 있다. E 와 F 는 각각 선분 AD 와 선분 BC 위의 점이고 $\overline{EF} // \overline{AB} // \overline{DC}$ 이다. 그리고 사다리꼴 $EFCD$ 의 넓이는 사다리꼴 $ABFE$ 의 넓이의 2배이다. $\overline{AB} = 8$ 이고 $\overline{DC} = 4$ 일 때, \overline{EF}^2 의 값을 구하여라.



14. (16점) 두 자리 자연수 x 의 십의 자리 수를 a , 일의 자리 수를 b 라 할 때, $S(x) = a \times b$ 라 정의하자. 예를 들어, $x = 36$ 일 때 $S(x) = 3 \times 6 = 18$ 이다. 이때, 두 조건

- (i) $20 \leq x < 40$,
- (ii) $S(x) = x^2 - 16x - 506$

을 만족하는 두 자리 자연수 x 를 구하여라.

15. (18점) 이차방정식 $x^2 + x - 5 = 0$ 의 두 근을 p, q 라 하자. 다음 이차식 $Ax^2 + Bx + 9$ 에 $x = p$ 를 대입하면 값이 q 가 되고, $x = q$ 를 대입하면 값이 p 가 된다. 이차방정식 $Ax^2 + Bx + 9 = 0$ 의 두 근을 a, b 라 할 때, $-8ab$ 의 값을 구하여라.