제1회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회

(고등학교 3학년 문제)

1. (12점) 방정식

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-101|=a$$

가 꼭 하나의 해를 가지도록 실수 a의 값을 정하여라.

2. (12점) $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 정수일 때,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

을 만족하는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 개수를 구하여라.

3. (12점) $2^{40}+3^n$ 이 7의 배수가 되는 자연수 n중에서 가장 작은 것을 구하여라.

4. (12점) $a=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}-\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$ 일 때,

$$\log_{10}(a^6+6a^4+9a^2+40)$$

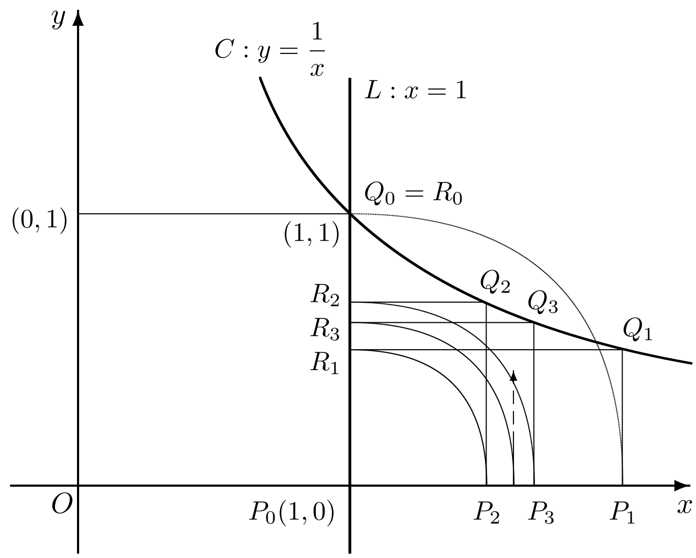
을 계산하여라.

5. (12점) A는 4개의 원소를 가지는 집합이다. A에서 A로의 함수 f 중에서 모든 $x\in A$ 에 대하여 $f(f(x))=x$ 를 만족하는 함수의 개수를 구하여라.

6. (12점) 함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+2ax$ 가 주어졌다고 하자. 범위 $0\leqq a\leqq 2$ 에 있는 실수 a에 대하여, 함수 $f(x)$의 그래프와 x-축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최소값을 S라고 할 때, $100S$를 구하여라.

7. (13점) $U=\{2,2^2,2^3,\cdots,2^{100}\}$ 을 전체집합이라 하고, 공집합을 제외한 U의 모든 부분집합을 $A_1,A_2,\cdots,A_n$이라고 하자. 각 A_k의 최대인 원소를 a_k라고 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$의 값을 구하여라.

8. (13점) 아래의 그림을 보자.



함수 $y = \dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 C라고 두고, 직선 $x = 1$ 을 L로 두자. 점 $P_0(1, 0)$과 실수 $a_0 = 1$ 로 부터 시작하여 다음과 같이 반복적인 방법으로 수열 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 를 만들자.

(i) 실수 $a_0 = 1,\ a_2,\ \cdots, a_k$ 와 점 $P_0(a_0, 0),\ P_1(a_1, 0), \cdots, P_k(a_k, 0)$ 이 구해졌다고 하자.

(ii) 점 P_k 에서 x-축에 대한 수선을 올려서 곡선 C 와 만나는 점을 Q_k 라고 둔다.

(iii) 점 Q_k 를 지나서 x-축에 평행한 직선을 긋고, 이 직선과 직선 L이 만나는 점을 R_k 라고 둔다.

(iv) 점 R_k 를 점 $P_0(1, 0)$ 를 중심으로 하여 시계방향으로 $90°$ 회전시켰을 때, x-축에 생기는 점을 P_{k+1} 이라 하고, 그 점의 x-좌표를 a_{k+1} 로 둔다.

이렇게 만들어진 수열 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 가 실수 b에 수렴한다고 할 때, $100(b - \frac{1}{2})^2$ 을 구하여라.

9. (13점) 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10x - 1$ 은 전체 실수 구간에서 증가함수이므로 역함수 $f^{-1}(x)$를 가진다. 이 때,

$$4\int_{-15}^{15} |f^{-1}(x)|\, dx$$

를 계산하여라.

10. (13점) 잔잔한 바다에 두 척의 어선 A와 B가 0.6Km의 거리로 떨어져 정지해 있다. A로 부터의 거리와 B로 부터의 거리의 합이 1Km이내인 바다속의 고기떼를 탐지할 수 있다고 한다. 두 척의 어선에 의하여 탐지되는 바다속 영역의 부피를 V라 할때, $\dfrac{300V}{\pi}$를 구하여

라. 단, 바다의 깊이는 0.5Km 이상이며 표면이 편평하다고 하고, 부피의 단위는 Km^3로 하여라.

11. (14점) p는 소수, b $(b \geqq 2)$ 는 자연수이다. p를 b진법을 사용하여

$$p = (a_{b-1}a_{b-2}\cdots a_1a_0)_b$$

로 나타낼 때에, b자리의 수로서 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{b-1}$ 에는 $0, 1, 2, \cdots, b-1$ 이 꼭 한번씩 나타나도록 하고자 한다. 적당한 b 진법에 의하여 이와 같은 방법으로 나타낼 수 있는 모든 소수 p들의 합을 구하여라.

12. (14점) 서로 다른 2002개의 영이 아닌 복소수를 원소로 가지는 집합

$$X = \{z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{2000},\ z_{2001}\}$$

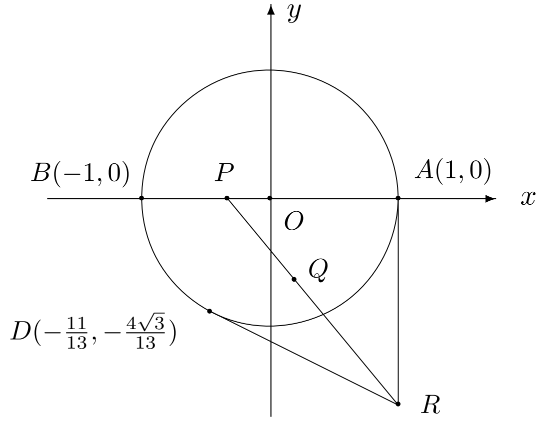
이 곱셈에 관하여 닫혀 있다고 한다. 이 때,

$$(\sum_{k=0}^{2001} z_k^{2002}) - (z_0z_1z_2\cdots z_{2000}z_{2001})$$

을 계산하여라.

[**도움말** : 임의의 자연수 n에 대하여, 방정식 $x^n - 1 = 0$ 은 서로 다른 n개의 복소수 근 $\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n})$ 을 가진다 $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$. 여기서, $i^2 = -1$ 이다.]

13. (16점) 원점을 중심으로 하는 단위원 C위에 점 $A(1,0)$, $B(-1,0)$ 및 $D(-\frac{11}{13}, -\frac{4\sqrt{3}}{13})$가 있다. 점 A와 D에서 각각 원 C의 접선을 긋고, 두 접선의 교점을 R이라 두자. 점 P가 선분 AB 위를 움직일 때, 선분 PR 위의 점 Q는 $\overline{PR}\cdot\overline{QR} = \overline{AR}^2$ 을 만족하면서 움직인다. 점 Q가 그리는 곡선의 길이를 l이라고 할 때, $(\frac{9}{\pi}l)^2$ 을 구하여라.



14. (16점) 점화식 $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x + \dfrac{1}{x}$,

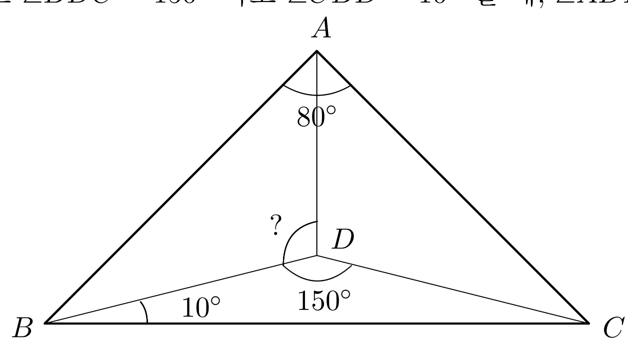
$$P_n(x) + P_{n-2}(x) = (x + \frac{1}{x})P_{n-1}(x) \quad (n \geqq 2)$$

에 의하여 정의된 x에 관한 함수들 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_{2001}(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{d}{dx} x P_{2001}(x) \right)$$

의 값을 구하라.

15. (16점) 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고 $\angle BAC = 80°$ 이다. 점 D는 삼각형 ABC 내부의 한 점으로 $\angle BDC = 150°$ 이고 $\angle CBD = 10°$ 일 때, $\angle ADB$는 몇 도인가?



[**도움말** : 변 AC에 대한 점 D의 대칭점 D'를 이용하여라.]