

**제1회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회**  
( 고등학교 2학년 문제)

1. (12점) 지상 25m에서 연직 상방으로 던져올린 돌의 시각  $t$ 에서의 높이는  $h(t) = 25 + 20t - 5t^2$ 이다. 이 돌이 땅에 도달하는 순간의 속력을 구하여라. 단, 길이의 단위는 미터, 시간의 단위는 초이다.

2. (12점)  $a = \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}$  일 때,

$$\log_{10}(a^6 + 6a^4 + 9a^2 + 40)$$

을 계산 하여라.

3. (12점) 실수  $a$  와  $b$  에 대하여

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & a+3 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

라고 두자. 영행렬이 아닌 어떤  $2 \times 2$  행렬  $C$  와  $D$  에 대하여  $AC$  와  $BD$  가 모두 영행렬이 될 때,  $b$  를 구하여라.

4. (12점) 등식  $\frac{(1+i)^n}{i} = (1-i)^n$ 을 만족하는 자연수  $n$ 을 6으로 나눌 때 얻을 수 있는 모든 나머지들의 합을 구하여라. 단,  $i = \sqrt{-1}$ 이다.

5. (12점)  $A$ 는 4개의 원소를 가지는 집합이다.  $A$ 에서  $A$ 로의 함수 중에서 모든  $x \in A$  에 대하여  $f(f(x)) = x$  를 만족하는 함수  $f$ 의 개수를 구하여라.

6. (12점) 직선  $y = -x + 4$  와 직선  $y = 8x + b$  가 곡선  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + a$  의 접선들이 될 때, 양의 실수  $b$ 를 구하여라.

7. (12점) 함수  $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  의 그래프는 원점에 관해서 대칭이고 점(1,9)를 지나며,  $x = 2$  에서  $f(x)$ 가 극값을 가진다고 할 때,  $a + b + c + d + e$  의 값을 구하여라.

8. (13점) 10차 다항식

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-9)(x-10)$$

를  $(x-6)^2$ 으로 나눈 나머지를  $ax+b$ 라 할 때,  $\frac{a-b}{7}$  를 계산하여라.

9. (13점) 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x, y$  에 대하여

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

를 만족할 때,  $10 \times f(-100)$  을 계산하여라.

10. (13점) 각  $x$ 가  $0^\circ < x < 180^\circ$  의 범위에 있을 때,

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x \geq 0$$

을 만족하는 최대의  $x$ 는 몇 도인가?

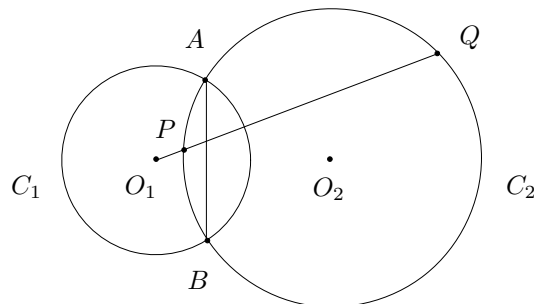
[도움말: 임의의 두 각  $A, B$ 에 대하여

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

이다.]

11. (13점)  $U = \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{100}\}$  을 전체집합이라 하고, 공집합을 제외한  $U$ 의 모든 부분 집합을  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 이라고 하자. 각  $A_k$ 의 최대인 원소를  $a_k$ 라고 할 때,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$  을 계산하여라.

12. (15점) 아래 그림에서 원  $C_1$ 은 중심이  $O_1$ 이고 반지름이 13이며, 원  $C_2$ 는 중심이  $O_2$ 이고 반지름이 37이다. 원  $C_1$ 과  $C_2$ 의 교점을  $A$ 와  $B$ 라고 하고, 점  $O_1$ 을 지나는 직선과 원  $C_2$ 가 두 점  $P$ 와  $Q$ 에서 만난다고 한다.  $\overline{AB} = 24$  라고 할 때,  $\overline{O_1P} \times \overline{O_1Q}$  의 값을 구하여라.



13. (15점) 함수  $f(x)$ 는 전체실수 구간에서 미분가능이고  $f(1) \neq 0$  이며, 모든 실수  $x, y$ 에 대하여

$$f(x+y-1) + f(x-y+1) = f(x)f(y)$$

를 만족한다.  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  이라고 할 때, 극한

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)f(1) - (f(g(x)))}{x}$$

을 구하여라.

14. (17점) 점화식  $P_0(x) = 1, P_1(x) = x + \frac{1}{x},$

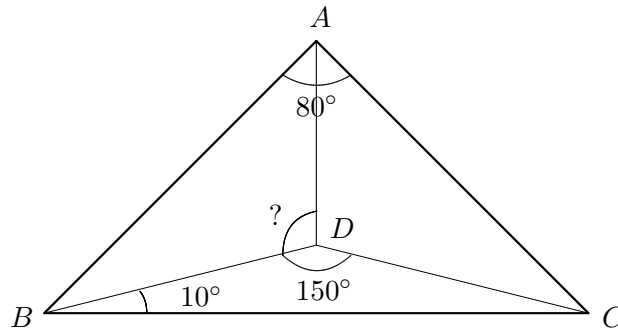
$$P_n(x) + P_{n-2}(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)P_{n-1}(x) \quad (n \geq 2)$$

에 의하여 정의된  $x$ 에 관한 함수들  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{2001}(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{d}{dx} x P_{2001}(x) \right)$$

의 값을 구하라.

15. (17점) 삼각형  $ABC$ 는  $\overline{AB} = \overline{AC}$  인 이등변삼각형이고  $\angle BAC = 80^\circ$  이다. 점  $D$ 는 삼각형  $ABC$  내부의 한 점으로  $\angle BDC = 150^\circ$  이고  $\angle CBD = 10^\circ$  일 때,  $\angle ADB$ 는 몇 도인가?



[도움말 : 변  $AC$ 에 대한 점  $D$ 의 대칭점  $D'$ 를 이용하여라.]