

**제1회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회**  
( 고등학교 1학년 문제)

1. (12점) 방정식

$$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \cdots + |x - 101| = a$$

가 꼭 하나의 해를 가지도록 실수  $a$ 의 값을 정하여라.

2. (12점)

$$A = \sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}}, \quad B = \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$

라고 둘 때,  $A$  와  $B$ 는 실수이고,  $A + B$ 가 정수가 되는 자연수  $n$  을 구하여라.

3. (12점)  $2^{40} + 3^n$ 이 7의 배수가 되게 하는 자연수  $n$ 중에서 가장 작은 것을 구하여라.

4. (12점) 3차 방정식  $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근이  $a, b, c$ 일때,

$$\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2}$$

의 값을 계산하여라.

5. (12점) 등식  $\frac{(1+i)^n}{i} = (1-i)^n$ 을 만족하는 자연수  $n$ 을 6으로 나눌 때 얻을 수 있는 모든 나머지의 합을 구하여라. 단,  $i = \sqrt{-1}$ 이다.

6. (12점) 2차 방정식  $ax^2 + 3ax + 2a + 1 = 0$  ( $a \neq 0$ ) 의 해가 모두 유리수가 되게 하는 정수  $a$ 를 구하여라.

7. (12점) 실수  $x, y$ 가  $y \leq 2 - x^2$  을 만족할 때  $20(y - x)$  의 최대값을 구하여라.

8. (12점) 0이 아닌 실수 전체의 집합의 부분집합 중에서 다음을 만족하는 공집합이 아닌 유한집합  $A$ 의 개수를 구하여라:

“ $x, y$ 가  $A$ 의 원소이면  $\frac{x}{y}$ 도  $A$ 의 원소이다”.

9. (13점)  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 는 서로 다른 정수로서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq -8$$

을 만족한다. 방정식

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) = 36$$

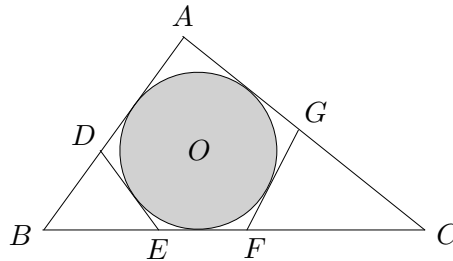
의 모든 자연수해들의 합을 구하여라.

10. (13점) 두 양수  $x, y$ 가  $x + y = 1$ 을 만족하는 경우에

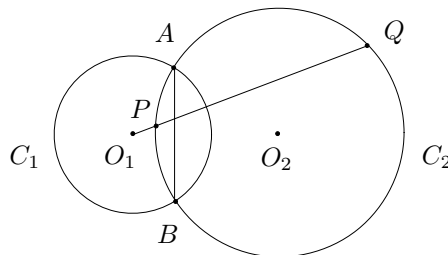
$$25x^4 + 114x^2y^2 + 25y^4 + 80x^3y + 80xy^3$$

의 최소값을  $a$ 라고 할 때,  $100a$ 를 구하여라.

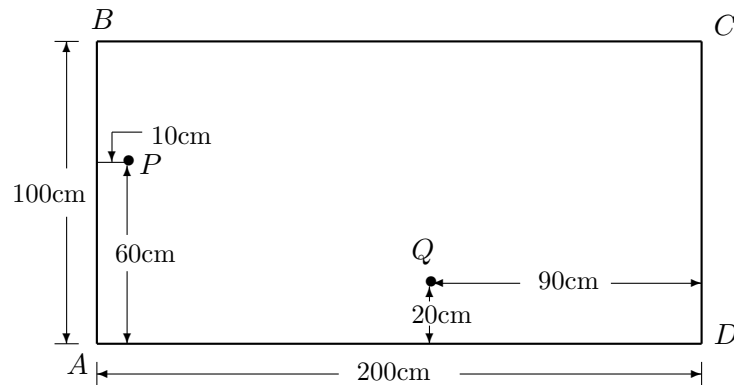
11. (13점) 아래 그림과 같이 원  $O$ 가 삼각형  $ABC$ 에 내접하고 선분  $DE$ 와  $FG$ 는 원  $O$ 에 접한다. 이 때 삼각형  $BED$ 의 둘레와 삼각형  $CGF$ 의 둘레의 합을 구하여라. 단,  $\overline{AB} = 10$ ,  $\overline{BC} = 20$ ,  $\overline{CA} = 15$  이다.



12. (15점) 아래 그림에서 원  $C_1$ 은 중심이  $O_1$ 이고 반지름이 13이며, 원  $C_2$ 는 중심이  $O_2$ 이고 반지름이 37이다. 원  $C_1$ 과  $C_2$ 의 교점을  $A$ 와  $B$ 라고 하고, 점  $O_1$ 을 지나는 직선과 원  $C_2$ 가 두 점  $P$ 와  $Q$ 에서 만난다고 한다.  $\overline{AB} = 24$  라고 할 때,  $\overline{O_1P} \times \overline{O_1Q}$ 의 값을 구하여라.



13. (15점) 가로 200cm, 세로 100cm 크기의 당구대의 꼭지점을 그림과 같이  $A, B, C$  및  $D$ 로 나타내자. 그림의  $P$ 에 있는 하얀 당구공이 벽면  $AB, BC, CD$  및  $DA$ 에 차례대로 부딪혀 반사되어  $Q$ 에 있는 빨간 당구공을 맞추었다고 하자. 이 때, 하얀 당구공이 움직인 거리는 몇 cm 인가? 단, 당구대와 당구공 사이에는 마찰이 없고, 벽면에 대하여 당구공의 입사각과 반사각은 같다고 가정한다.



14. (17점) 공집합이 아닌 집합  $S$  위에서 정의된 이항연산  $*$  가 다음의 세 성질을 만족한다고 하자.

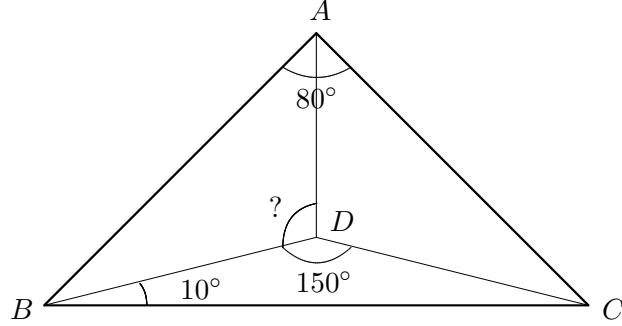
- (i)  $S$ 의 모든 원소  $a, b$ 에 대하여  $a * (a * b) = b$  가 성립한다.
- (ii)  $S$ 의 모든 원소  $a, b$ 에 대하여  $(a * b) * b = a$  가 성립한다.
- (iii)  $S$ 의 모든 원소  $a, b, c$ 에 대하여  $(a * b) * c = (c * b) * a$  가 성립한다.

이항연산  $*$  에 대한 다음의 네 명제

- I. 반드시 항등원이 존재한다,
- II. 결합법칙이 성립한다,
- III. 교환법칙이 성립한다,
- IV.  $S$ 의 모든 원소  $a$ 에 대하여  $a * a = a$ 이다,

각각에 대하여, 참일 때는 1로, 거짓일 때는 0으로 진리값을 정한다. 위의 네 명제의 진리값을 순서대로 써라. 예를 들면, 명제 I이 참, 명제 II가 거짓, 명제 III이 참, 명제 IV가 거짓이면 1010으로 쓰면 된다.

15. (18점) 삼각형  $ABC$ 는  $\overline{AB} = \overline{AC}$  인 이등변삼각형이고  $\angle BAC = 80^\circ$  이다. 점  $D$ 는 삼각형  $ABC$  내부의 한 점으로  $\angle BDC = 150^\circ$  이고  $\angle CBD = 10^\circ$  일 때,  $\angle ADB$ 는 몇 도인가?



[도움말 : 변  $AC$ 에 대한 점  $D$ 의 대칭점  $D'$ 를 이용하여라.]