

제2회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회
(중학교 3학년 문제)

1. 실수 x 가 $x^2 + 7x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라. (10점)
2. 2차 방정식 $ax^2 + 3ax + 2a + 1 = 0$ 의 해가 유리수가 되는 정수 a 의 개수를 구하여라. (10점)
3. 자연수 x 를 5로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 로 표시한다.

$$R(1^2) + R(2^2) + \cdots + R(n^2) > 2999$$

를 만족하는 가장 작은 자연수 n 을 구하여라. (11점)

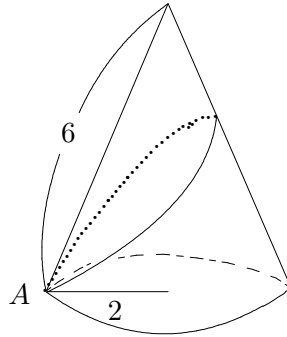
4. 8개의 문자 N, A, T, I, O, N, A, L 이 있다. 이 8개의 문자를 같은 문자 끼리는 서로 인접하도록 배열하는 방법의 수를 s 라고 하자. 그리고 남학생 4명과 여학생 2명을 여학생이 양 끝에 있도록 정렬시키는 방법의 수를 t 라고 하자. 이 때, $s + t$ 의 값을 구하여라. (11점)
5. 학생 A 의 상자에는 3, 5, 7, 9의 숫자가 각각 표시된 공이 네 개가 들어 있고, 학생 B 의 상자에는 4, 6, 8의 숫자가 각각 표시된 공이 세 개가 들어 있다. 두 학생이 각자의 상자에서 두 개의 공을 꺼집어 내었을 때, 표시된 두 수의 합이 크면 게임에서 이기고 그 합을 득점하기로 한다. 학생 B 의 득점의 기대값을 구하여라. (11점)
6. 방정식 $x^2 - 7876x - 876 = 0$ 의 서로 다른 두 해를 a, b 라고 하고 $x^2 - 7876x - 870 = 0$ 의 서로 다른 두 해를 c, d 라고 할 때, $(a-c)(b-c)(a-d)(b-d)$ 의 값을 구하여라. (12점)
7. 주사위를 두 번 던졌을 때 나온 눈의 수를 각각 a 와 b 라고 할 때, 다음의 두 곡선

$$y = x^2 + 2bx + 2a$$

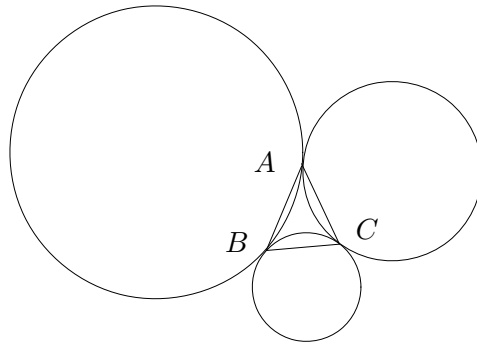
$$y = -x^2 + 4ax + b$$

이 많아야 한 점에서 만날 확률을 p 라 하자. 이 때, $\frac{1}{p}$ 의 값을 구하여라. (12점)

8. 아래 그림의 원뿔은 빗변의 길이가 6이고, 밑면의 반지름은 2이다. 밑면 가장자리의 한 점 A 에서 줄을 원뿔에 한 바퀴 감아 팽팽히 당겨서 줄의 길이가 최소가 되도록 하였다. 줄의 길이를 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라. (13점)



9. 반지름이 각각 3, 6, 9인 세 개의 원이 아래 그림과 같이 세 점 A, B, C 에서 서로 접하고 있다. 삼각형 ABC 의 넓이를 x 라고 할 때, $55x$ 의 값을 구하여라. (13점)



10. 전체집합 $U = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여, 다음 다섯 개의 조건을 만족하는 부분집합 A 의 개수를 구하여라. (14점)

조건 :

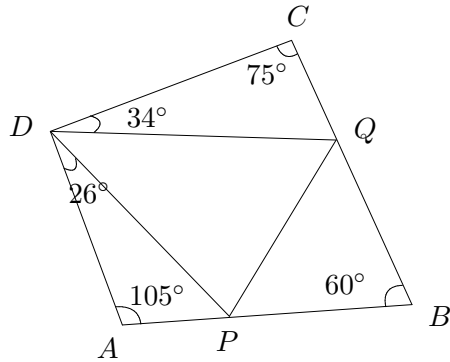
- (1) B 는 U 의 부분집합이다,

- (2) $A \cap B = \{2\}$,
- (3) $A \cup B = U$,
- (4) A 의 원소들의 합 $S(A)$ 와 B 의 원소들의 합 $S(B)$ 의 최대공약수는 5이다,
- (5) $S(A) > S(B)$.

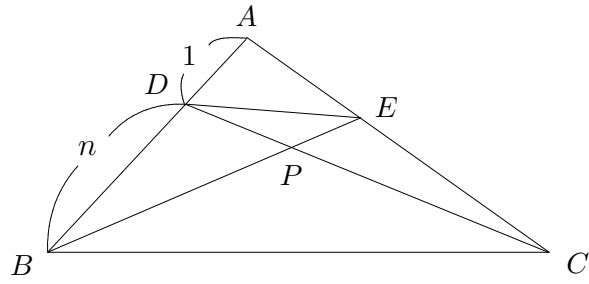
11. 십진법으로 표시된 세 자리의 자연수 $a = xxx$ 와 여섯 자리의 자연수 $b = yyyyyy$ 가 $a^2 + 888 = b$ 를 만족할 때, $10x + y$ 의 값을 구하여라. (15점)

12. 자연수 n 에 대하여 n 의 “계승”은 $n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$ 로 정의하고 $n!$ 로 표시한다. 그리고 0의 계승은 $0! = 1$ 로 정의한다. 예를 들면, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ 이다. 세 자리수 이하의 자연수 중에서 자신의 각 자리수의 계승의 합이 자신과 같은 자연수를 모두 찾아내어 그 합을 구하여라. (16점)

13. 아래 그림의 사각형 $ABCD$ 에서 $\angle A = 105^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 75^\circ$ 이고 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 이다. 선분 AB 와 BC 위에 점 P 와 Q 를 $\angle ADP = 26^\circ$, $\angle CDQ = 34^\circ$ 가 되도록 잡았다. 이 때, $\angle DPQ$ 를 구하여라. (17점)



14. 아래 그림과 같이 삼각형 ABC 의 변 AB 와 AC 위의 점 D 와 E 를 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC} = 1 : n$ 되게 잡고, 선분 CD 와 BE 가 만나는 점을 P 라 하자. 삼각형 ABC 의 넓이와 삼각형 PBC 의 넓이의 비율이 $17 : 16$ 일 때, n 의 값을 구하여라. (17점)



15. 1부터 차례대로 자연수를 한 줄에 n 개씩 나열하자. 연속한 세로 4줄과 가로 3줄에 공통으로 속하는 수 12개를 묶어서 하나의 블록을 만들고, 이 12개의 숫자 중에서 가장 작은 수를 이 블록의 “대표수”라고 하자. 예를 들어, $n = 7$ 일 때, 아래 그림과 같이 주어진 블록의 대표수는 9이다.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
.....						
.....						

블록안의 12개의 수의 합이 12294가 되는 블록들의 대표수 중 가장 큰 값을 구하여라.

(18점)