

제2회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회

(중학교 2학년 문제)

1. x 와 y 는 한 자리 자연수이다. 순환소수 $0.\dot{x}y$ 에 대하여, $0.\dot{x}y = \frac{2x \times y}{33}$ 이다. 이 때, $800x + 601y$ 의 값을 계산하여라. (10점)

2. 자연수 a, b 와 미지수 x, y 에 대하여, 식

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2a+b} \div (x^2y)^a \times x^b \div \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{2+b} = \frac{y^{5b-4}}{x^{10a}}$$

이 성립할 때, $a + 50b$ 의 값을 계산하여라. (10점)

3. 부산시의 7개 중학교 축구팀이 2002년 6월 1일부터 리그전(즉, 모든 팀과 한번씩 경기를 하는 방식)으로 경기를 하기위하여 대진표를 만들려고 한다. 편의상 7개 팀에 1번부터 7번까지의 번호를 붙이자. m 번 팀과 n 번 팀의 경기는 $m+n$ 이 7이면 6월 7일에, 그리고 $m+n$ 이 7이 아니면 $m+n$ 을 7로 나누었을 때의 나머지와 같은 날짜에 경기를 치르도록 한다. 예를 들면, 3번 팀은 4번 팀과는 7일에, 5번 팀과는 1일에 경기를 갖는다. 2번 팀과 세 번째, 네 번째, 다섯 번째, 여섯 번째 경기를 갖게되는 팀의 번호를 순서대로 a, b, c, d 라고 할 때, $1000a + 100b + 10c + d$ 를 계산하여라. (10점)

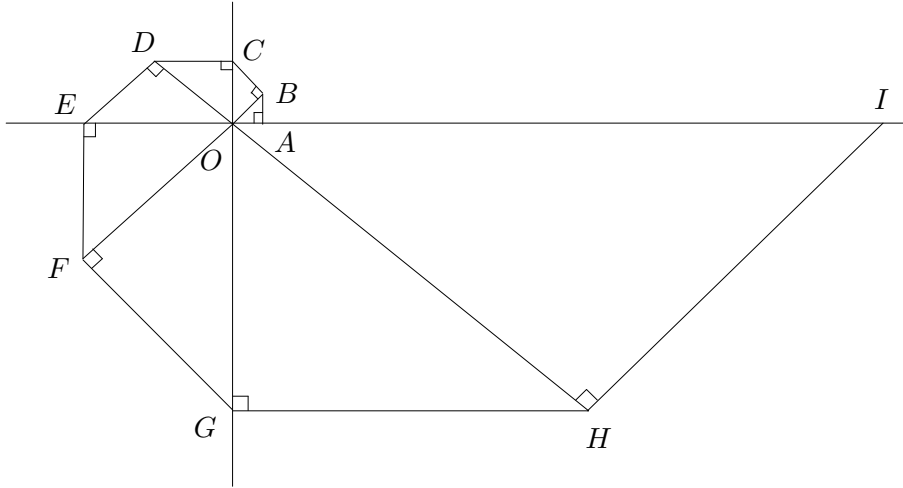
4. 앞뒤 어느 쪽에서 읽어도 같은 수가 되는 자연수를 “대칭수”라 부른다. 예를 들어 363과 777 등은 세자리 대칭수이고 7557과 9999 등은 네자리 대칭수이다. 서로 다른 두 개의 세 자리 대칭수의 합으로 표현되는 4자리 대칭수 중 가장 큰 수를 구하여라. (11점)

5. a, b, c 는 자연수이고 두 조건 $a \leq b \leq c$ 와 $abc = a + 2b + 3c$ 를 만족한다. 이 때, $a + b + c$ 의 가장 큰 값을 구하여라. (12점)

6. 흰 주머니 속에는 1부터 5까지의 숫자가 각각 적힌 5개의 종이쪽지가, 그리고 검은 주머니 속에는 1부터 10까지의 숫자가 각각 적힌 10개의 종이쪽지가 들어 있다. 학생 A는 흰 주머니에서, 그리고 학생 B는 검은 주머니 속에서 하나씩 꺼내어 서로 비교한

다. 만일 A 가 꺼낸 숫자 p 가 B 가 꺼낸 숫자 q 의 약수이면 A 는 B 로부터 상금 x 원을 받기로 하고, p 가 q 의 약수가 아니면 B 는 A 로부터 330원의 상금을 받기로 한다. A 와 B 의 상금의 기대값이 같게 되도록 x 를 결정하여라. (12점)

7. 아래 그림과 같이 점 O 를 중심으로 하여 직각이등변삼각형을 여덟 개 만들었다. 선분 EI 의 길이를 계산하여라. 단, $\overline{OA} = 5$ 이다. (13점)



8. 자연수 x 를 5로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 로 표시한다.

$$R(1^2) + R(2^2) + \dots + R(n^2) > 2999$$

를 만족하는 가장 작은 자연수 n 을 구하여라. (13점)

9. 좌표평면 위의 세 점, $O(0,0)$, $A(2,8)$ 와 $B(6,6)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 OAB 의 외심의 좌표를 (a,b) 라고 할 때, $72ab$ 를 계산하여라. (14점)

(Hint: $k \neq 0$ 일 때, 두 직선 $y = kx$ 와 $y = -\frac{1}{k}x$ 은 서로 수직이다.)

10. 전체집합 $U = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여, 다음 다섯 개의 조건을 만족하는 부분집합 A 의 개수를 구하여라. (15점)

조건 :

- (1) B 는 U 의 부분집합이다,

- (2) $A \cap B = \{2\}$,
- (3) $A \cup B = U$,
- (4) A 의 원소들의 합 $S(A)$ 와 B 의 원소들의 합 $S(B)$ 의 최대공약수는 5이다,
- (5) $S(A) > S(B)$.

11. a 와 b 는 영이 아닌 실수이고, 부등식 $ax + b < a$ 의 해는 $x > a$ 이고, $bx + a > b$ 의 해는 $x < \frac{3}{4}$ 이다. ab 를 계산하여라. (15점)

12. 임의의 실수 x 의 절대값을

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0 \text{ 일 때}) \\ -x & (x < 0 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

와 같이 정의한다. 연립방정식

$$\begin{cases} y = |x - 2| - |x + 2| + x + 2 \\ y = ax + 2a - 3 \end{cases}$$

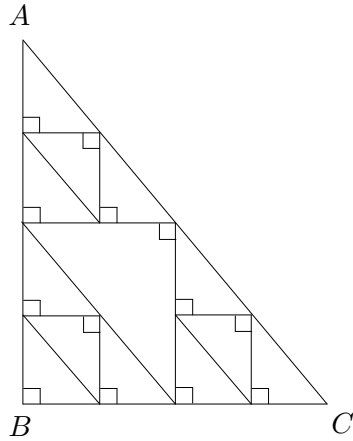
이 꼭 2개의 서로 다른 해를 가질 때, 두 방정식

$$y = |x - 2| - |x + 2| + x + 2 \text{ 와 } y = ax + 2a - 3$$

의 그래프로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라. (16점)

13. 10진법으로 표시된 세 자리의 자연수 $a = xxx$ 와 여섯 자리의 자연수 $b = yyyyyy$ 가 $a^2 + 888 = b$ 를 만족한다. 이 때, $10x + y$ 의 값을 구하여라. (16점)

14. 아래 그림과 같이 직각삼각형 ABC 를 닭은꼴의 작은 삼각형 13개로 나누었다. 작은 삼각형들을 3가지 색깔의 페인트로 칠하려고 한다. 변으로 서로 이웃한 삼각형에는 같은 색이 칠해지지 않도록 하는 방법의 수를 구하여라. (16점)



15. 아래 그림과 같이 삼각형 ABC 의 변 AB 와 AC 위의 점 D 와 E 를 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC} = 1 : n$ 되게 잡고, 선분 CD 와 BE 가 만나는 점을 P 라 하자. 삼각형 ABC 의 넓이와 삼각형 PBC 의 넓이의 비율이 $17 : 16$ 일 때, n 의 값을 구하여라. (17점)

