

제2회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회

(고등학교 3학년 문제 : 자연계)

1. 범위가 $1 \leq a \leq 2002$ 인 자연수들 중에서 $a^{2002} - 1$ 이 10의 배수가 되는 a 의 개수를 구하여라. (10점)

2. $0 < \theta < 180$ 이고 $z = \cos \theta^\circ + i \sin \theta^\circ$ ($i = \sqrt{-1}$) 일 때, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ 이 실수가 되는 모든 θ 의 값들의 합을 구하여라. (10점)

3. 함수 $f(x) = x^5 + 3x + 1$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 에 대하여,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(5 + 40h) - f^{-1}(5)}{h}$$

의 값을 구하여라. (11점)

4. 실수 위에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f(0) &= 5, & f(x+1) &= \frac{g(x)}{f(x)}, \\ g(0) &= 2, & g(x+1) &= \frac{g(x) - 1}{f(x) - 1}. \end{aligned}$$

가 성립할 때, $\frac{f(103)}{g(101)}$ 의 값을 구하여라. (12점)

5. 한 웅덩이에 개구리와 도마뱀 두 종류의 동물이 살고 있다. 살아가기 위하여 각 개구리는 오전에 도마뱀을 한 마리씩 잡아 먹고, 각 도마뱀은 오후에 개구리를 한 마리씩 잡아 먹는다고 하자. 5월 6일 저녁에 웅덩이를 살펴보니 개구리 한 마리와 도마뱀 한 마리만 남아 있었다. 5월 1일 새벽에 웅덩이에 있었던 개구리의 수와 도마뱀의 수의 합을 구하여라. 단, 그 동안 새로 태어난 개구리나 도마뱀은 없었고, 다른 방법에 의하여 없어진 개구리나 도마뱀도 없었다고 한다. (12점)

6. 함수 $f(x)$ 가 모든 정수 n 에 대하여

$$f(0) = 1, \quad f(f(n)) = n, \quad f(f(n+2) + 2) = n$$

을 만족할 때, $f(-100)$ 의 값을 구하여라. (13점)

7. 함수 $f(x) = \sum_{k=1}^{10} (k+1) \sin(kx)$ 에 대하여,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

의 값을 구하라. (13점)

8. $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{a\sqrt{5} + b}{4}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라. 단, a 와 b 는 유리수이다. (힌트: $\cos 2\alpha = \cos 3\alpha$ 를 이용하여라). (13점)

9. 입자 A 는 점 $(0, 1)$ 에서 출발하여 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 각속도 1라디안/sec 로 반시계방향으로 움직이고, 입자 B 는 점 $(4, 0)$ 에서 출발하여 원 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ 위를 각속도 2라디안/sec 로 반시계방향으로 움직인다. 두 입자가 동시에 출발하였을 때, 두 입자사이에 생길 수 있는 거리의 최대값 M 과 최소값 m 에 대하여 $M^2 + m^2$ 을 구하여라. (13점)

10. 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 미분가능이고 $f(2) = 3, f'(2) = 2$ 라고 한다. 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{kx f(x) - 6k}{x^2 - 4} & (x \neq 2) \\ 21 & (x = 2) \end{cases}$$

가 연속이 될 때, 상수 k 의 값을 구하여라. (14점)

11. 정적분 $\int_0^{4\pi} |5 \sin x + 12 \cos x| dx$ 의 값을 계산하여라. (15점)

12. x^{1000} 을 $x + 2$ 로 나눈 몫을

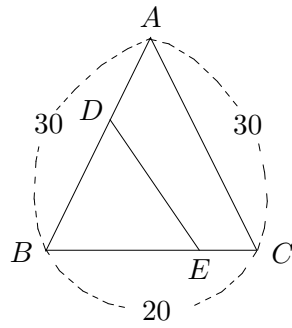
$$a_{999} + a_{998}x + \cdots + a_1x^{998} + a_0x^{999}$$

라고 할 때,

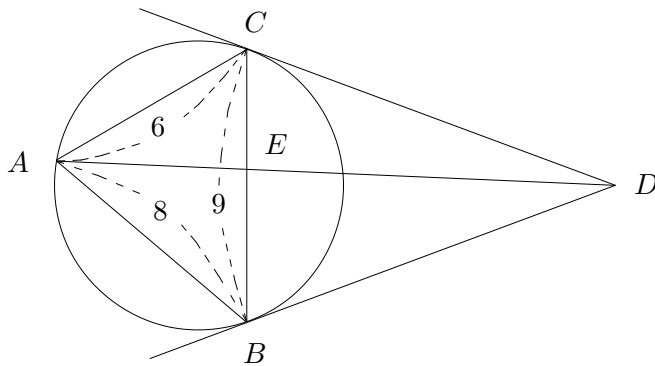
$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{998} - a_{999}$$

의 값을 이진법 수로 나타내면 몇 자리의 수가 되는가? (15점)

13. 삼각형 ABC 에 대하여 $\overline{AB} = \overline{AC} = 30$ 이고 $\overline{BC} = 20$ 이다. 점 D 와 E 는 각각 변 AB 와 BC 위에 점으로서 선분 DE 가 삼각형 ABC 의 넓이를 이등분할 때, 선분 DE 의 길이의 최소값을 구하여라. (16점)



14. 삼각형 ABC 의 외접원에 대하여, B 에서의 접선과 C 에서의 접선이 만나는 점을 D 라고 두고, 선분 AD 와 변 BC 가 만나는 점을 E 라고 하자. $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 9$ 일 때, $100 \times \overline{BE}$ 를 구하여라. (16점)



15. 어떤 볼록8각형의 꼭지점을 P_1, P_2, \dots, P_8 이라고 하자. 이 점들 중의 어떠한 네 점도 동일한 원 위에 있지 않다고 한다. 각 $i = 1, 2, \dots, 8$ 에 대하여, 꼭지점들 중의 세 점을 지나면서 점 P_i 를 내부에 포함하는 원들의 개수를 n_i 라고 할 때,

$$S = n_1 + n_2 + \dots + n_8$$

의 값을 구하여라. (17점)