

제2회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회 (고등학교 2학년 문제)

1. $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ 일 때, $|1 + z + z^2 + \cdots + z^7|$ 을 구하여라. (10점)

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 와 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여

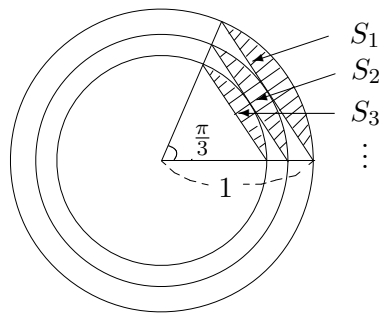
$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

가 성립한다. 이를 이용하여 A^{10} 의 모든 성분들의 합을 계산하여라. 단, B^{-1} 은 B 의 역행렬이다. (10점)

3. 그림과 같이 반지름이 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴에서 삼각형 T_1 을 뺀 나머지 부분의 넓이를 S_1 이라 하자. 다시 삼각형 T_1 에 접하는 부채꼴에서 이 부채꼴의 두 개의 끝점을 이어서 만들어진 삼각형 T_2 의 넓이를 뺀 나머지 부분을 S_2 라고 하자. 이와 같은 과정을 되풀이하여 만들어진 도형의 넓이를 각각 S_n 이라 하자. 이들의 무한합이

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{a\pi + b\sqrt{3}}{3}$$

으로 나타났을 때, $a - b$ 를 구하여라. 단, a 와 b 는 유리수이다. (11점)



4. 밑면의 지름과 높이가 모두 $8(\sqrt{2} + 1)$ 인 원뿔에 내접하는 정육면체의 부피를 구하여라. (12점)

5. 다항식 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{102}$ 에 대하여

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+1)}{f(1)} \right)^{\frac{1}{x}}$$

라고 두었을 때, $\log A$ 의 값을 구하여라. 단, \log 는 자연로그함수를 나타낸다. (12점)

6. 함수 $y = x^2(x-a)(x-b)$ 의 그래프와 x -축으로 둘러싸인 두 개의 영역의 넓이가 같을 때, $135 \times \frac{b}{a}$ 를 구하여라. 단, $0 < a < b$ 이다. (13점)

7. 방정식 $4x^3 - 18x^2 + 24x - 9 = 0$ 의 세 실근을 a, b, c 라고 할 때,

$$3 \log_{\sqrt{10}} 15 - \log_{\sqrt{10}} 2 - \log_{10}(a^3 + b^3 + c^3)^2$$

의 값을 계산하여라. (13점)

8. 한 웅덩이에 개구리와 도마뱀 두 종류의 동물이 살고 있다. 살아가기 위하여 각 개구리는 오전에 도마뱀을 한 마리씩 잡아 먹고, 각 도마뱀은 오후에 개구리를 한 마리씩 잡아 먹는다고 하자. 5월 6일 저녁에 웅덩이를 살펴보니 개구리 한 마리와 도마뱀 한 마리만 남아 있었다. 5월 1일 새벽에 웅덩이에 있었던 개구리의 수와 도마뱀의 수의 합을 구하여라. 단, 그 동안 새로 태어난 개구리나 도마뱀은 없었고, 다른 방법에 의하여 없어진 개구리나 도마뱀도 없었다고 한다. (13점)

9. 함수 $f(x) = (1-x)(2-x)\cdots(100-x)$ 에 대하여

$$g(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{f(x)}{(k-x)}$$

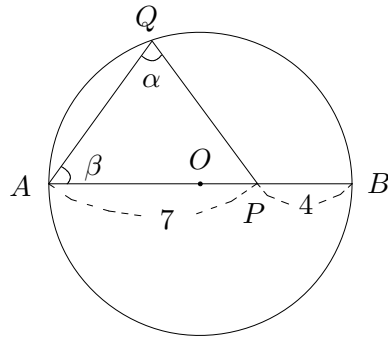
로 두었을 때, 방정식 $g(x) = 0$ 의 실근의 개수를 구하여라. (13점)

10. 함수 $f(x)$ 가 모든 정수 n 에 대하여

$$f(0) = 1, \quad f(f(n)) = n, \quad f(f(n+2)+2) = n$$

을 만족할 때, $f(-100)$ 의 값을 구하여라. (14점)

11. 점 P 는 선분 AB 위의 한 점으로서 $\overline{AP} = 7$ 이고 $\overline{BP} = 4$ 이다. 점 Q 는 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위의 한 점으로 A 및 B 와는 다른 점이다. $\alpha = \angle AQP$, $\beta = \angle QAP$ 라고 할 때, $100 \times \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 를 구하여라. (15점)



12. 수열 a_1, a_2, a_3, \dots 에 대하여,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 2, \quad \frac{a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1} a_n} \quad (n \geq 2)$$

가 성립한다. 이 때, $\frac{a_{10}}{2^{30}}$ 을 구하여라. (15점)

13. 함수 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 는 세 개의 서로 다른 실근을 가지며, $x = -1$ 에서 극대값, $x = 2$ 에서 극소값을 가진다고 한다. 극소값의 절댓값이 극대값의 절댓값의 두 배가 될 때, $4|a| + 3|b| + 2|c|$ 의 값을 구하여라. (16점)

14. x^{1000} 을 $x + 2$ 로 나눈 몫을

$$a_{999} + a_{998}x + \dots + a_1x^{998} + a_0x^{999}$$

라고 할 때,

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{998} - a_{999}$$

의 값을 이진법의 수로 나타내면 몇 자리의 수가 되는가? (16점)

15. 아래 그림과 같이 삼각형 ABC 의 외접원에 대하여, B 에서의 접선과 C 에서의 접선이 만나는 점을 D 라고 하고, 선분 AD 와 변 BC 가 만나는 점을 E 라고 하자. $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 9$ 일 때, $100 \times \overline{BE}$ 를 구하여라. (17점)

