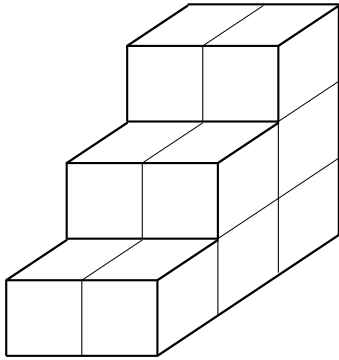


제2회 부산대학교 주최 수학 학력평가 및 수학 경시대회 (고등학교 1학년 문제)

1. 자연수 a, b 에 대하여, 세 정수 $a, a + b + 6$ 및 $a + 3b - 11$ 이 1 보다 큰 공약수를 가질 때, a 가 취할 수 있는 가장 작은 값을 구하여라. (10점)
2. 자연수 $510510 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$ 을 1 보다 큰 세 자연수의 곱으로 나타내는 방법의 수를 구하여라. 단, 곱하는 순서는 무시한다. (10점)
3. 아래의 그림은 한 변의 길이가 1인 정육면체 12개를 붙여서 만든 계단 모양의 입체이다. 이러한 입체들을 쌓아서 만들 수 있는 가장 작은 정육면체의 부피를 구하여라. (10점)



4. 두 양의 실수 x, y 에 대하여

$$x^2 - 4\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 2, \quad y^2 + 4\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 2$$

- 가 성립할 때, $x^3 + y^3$ 을 구하여라. (12점)

5. 방정식 $4x^3 - 18x^2 + 24x - 9 = 0$ 의 세 실근을 a, b, c 라고 할 때,

$$3 \log_{\sqrt{10}} 15 - \log_{\sqrt{10}} 2 - \log_{10}(a^3 + b^3 + c^3)^2$$

- 의 값을 계산하여라. (12점)

6. 함수 $f(x) = x - 10 \times \left[\frac{x}{10} \right]$ 에 대하여

$$f(7) + f(7^2) + f(7^3) + \dots + f(7^{102})$$

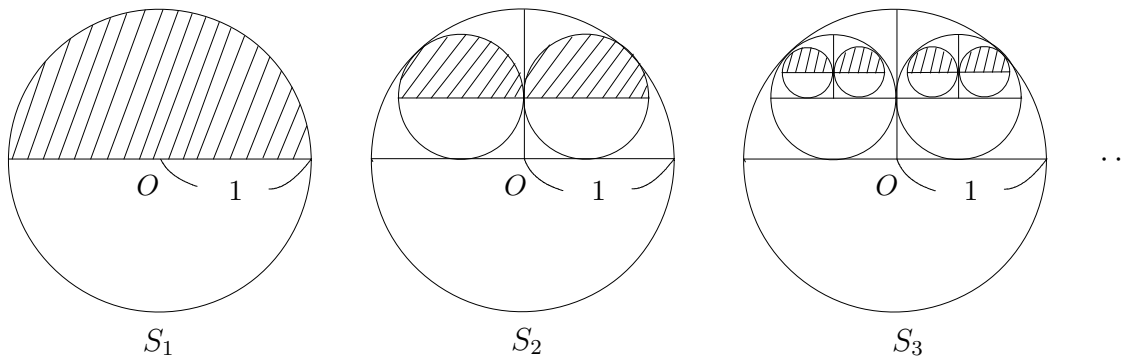
의 값을 구하여라. 단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타낸다. (13점)

7. 높이와 밑면의 지름이 모두 $8(\sqrt{2} + 1)$ 인 원뿔에 내접하는 정육면체의 부피를 구하여라. (13점)

8. 수열 $\{S_n\}$ 이 다음과 같이 만들어졌다고 하자. S_1 은 반지름이 1인 반원의 넓이, S_2 는 그림과 같이 그 반원을 이등분하여 각각의 등분된 영역에 내접된 원의 반원들의 넓이의 합이고, S_3 는 S_2 에서 얻어진 두 개의 반원들을 다시 이등분하여 나타나는 4개의 영역에 내접된 원의 반원들의 넓이의 합이라고 한다. 이제, 이런 과정을 n 번 반복하여 얻어지는 반원들의 넓이의 합을 S_n 이라고 한다. 이들의 무한합이

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi(a + b\sqrt{2})}{14}$$

으로 나타났을 때, ab 를 구하여라. 단, a 와 b 는 유리수이다. (14점)



9. 함수 $f(x) = (1 - x)(2 - x) \dots (100 - x)$ 에 대하여

$$g(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{f(x)}{(k - x)}$$

로 두었을 때, 방정식 $g(x) = 0$ 의 실근의 개수를 구하여라. (14점)

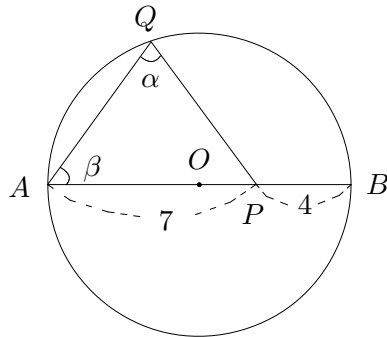
10. 한 웅덩이에 개구리와 도마뱀 두 종류의 동물이 살고 있다. 살아가기 위하여 각 개구리는 오전에 도마뱀을 꼭 한 마리씩 잡아 먹고, 각 도마뱀은 오후에 개구리를 꼭 한 마리씩 잡아 먹는다고 하자. 5월 6일 저녁에 웅덩이를 살펴보니 개구리 한 마리와 도마뱀 한 마리만 남아 있었다. 5월 1일 새벽에 웅덩이에 있었던 개구리의 수와 도마뱀의 수의 합을 구하여라. 단, 그 동안 새로 태어난 개구리나 도마뱀은 없었고, 다른 방법으로 없어진 개구리나 도마뱀도 없었다고 한다. (14점)

11. 함수 $f(x)$ 가 모든 정수 n 에 대하여

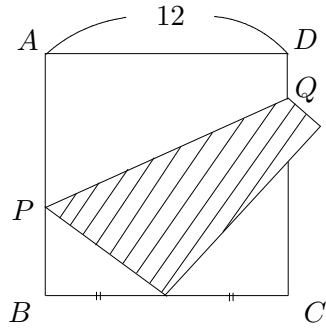
$$f(0) = 1, \quad f(f(n)) = n, \quad f(f(n+2)+2) = n$$

을 만족할 때, $f(-100)$ 을 구하여라. (15점)

12. 점 P 는 선분 AB 위의 한 점으로서 $\overline{AP} = 7$ 이고 $\overline{BP} = 4$ 이다. 점 Q 는 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위의 한 점으로 A 및 B 와는 다른 점이다. $\alpha = \angle AQP$, $\beta = \angle QAP$ 라고 할 때, $100 \times \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 를 구하여라. (15점)



13. 한변의 길이가 12인 정사각형 $ABCD$ 가 있다. 아래 그림과 같이 점 A 가 선분 BC 중점에 놓이도록 접었을 때, 접는 선의 양 끝점을 각각 P, Q 라고 두자. 이 때, $\overline{PB} + \overline{DQ}$ 를 구하여라. (15점)



14. 등식

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+3z} = 1$$

을 만족하도록 세 양의 실수 x, y, z 를 잡을 때, $300xyz$ 의 최소값을 구하여라. (16점)

15. 자연수 n 의 모든 자리수들의 곱을 $f(n)$ 이라고 하고, $g(n) = n^2 - 5n - 101$ 이라고 하자. $X = \{n \mid f(n) = g(n)\}$ 이라고 할 때, X 의 모든 원소들의 합을 구하여라. (예를 들어, $n = 417$ 이면 $f(n) = 4 \times 1 \times 7 = 28$ 이다.) (17점)